Corrigé du TD n°1
L'origine de la microéconomie

Question 1 : Qui était Robert Anne Turgot ?

Robert Anne Jacques Turgot est né le 10 mai 1727 à Paris où il mourra le 20 mars 1781. Turgot est d'abord connu comme un homme d'État, en raison principalement de son programme novateur de réformes libérales qu'il entreprend après avoir été nommé Contrôleur général des finances de Louis XVI, une sorte de 1er ministre du Roi, le 24 août 1774. Dès le 13 septembre 1774, il rétablit la liberté du commerce des grains. Puis, surtout, en mars 1776, il présente au Roi six projets d'Édits visant la suppression de la corvée, de la police des grains à Paris, des Jurandes et communautés de métier. Ce programme est libéral et révolutionnaire, sapant les bases mêmes de l'Ancien Régime, qui reposent sur un système social hiérarchique fait de communautés. D'ailleurs les représentants de la Noblesse s'y opposent au Parlement, entraînant le renvoi de Turgot par le Roi le 12 mai 1776. Pour l'historien F. Furet, l'œuvre législatrice de Turgot fut une anticipation de la Révolution française qui y trouva une source d'inspiration, notamment chez l'abbé Sieyès et son célèbre *Qu'est-ce que le tiers état* ? publié en 1789.

Avant d'arriver à ce point d'aboutissement de son œuvre, Anne Robert Turgot l'avait préparé de deux façons. Par ses fonctions d'Intendant du Limousin exercées de 1760 à 1774 où il mis en œuvre de nombreuses réformes fiscales et économiques de facture déjà libérale et par de nombreux écrits, la plupart sur des questions pratiques et quelques-uns plus théoriques. Sur le plan théorique, Robert Anne Turgot est inclassable ou, plutôt, développe dans son œuvre majeure, ses *Réflexions sur la formation et la distribution des richesses* publiées en 1766, des idées de nature physiocratique pour certaines et de nature classique pour d'autres. Une sorte de mixte entre le physiocrate François Quesnay pour lequel la terre est la seule source de la richesse et le classique Adam Smith qui associe la richesse des Nations à la productivité du travail et qui rencontra Turgot à Paris. Mais c'est à un troisième Turgot auquel nous nous intéresserons dans ce TD n°1 en nous référant à son article resté inachevé *Valeurs et Monnaies*. En effet, cet article est vu aujourd'hui par les économistes néoclassiques comme l'un des développements précurseurs de leur analyse microéconomique des marchés.

Pour un complément utile afin d'aller à la découverte de l'œuvre de Robert Anne Turgot, se rapporter à l'édition d'une sélection de ses textes choisis et présentés par J.-Th. Ravix et P.-M. Romani : *Turgot, Formation & distribution des richesses*, GF Flammarion, 1997.

Question 2 : Quel est l'objet de son article ? Et pour quelles raisons l'analyse qu'y développe Turgot peut-elle être qualifiée de microéconomique ?

L'objet de cet article, comme l'indique son titre, est la valeur. Depuis le Moyen Âge, le sens du mot valeur s'est infléchi : le latin *valor* ne désigne plus la valeur d'une personne, sa grandeur sociale, mais la valeur des choses. Plus précisément, et selon son titre encore, la valeur des biens dont il sera question est la valeur des biens dans le commerce où elle prend une forme monétaire.

Son analyse par Turgot appartient au registre de la microéconomie parce qu'il rapporte la valeur des choses dans l'échange aux comportements de l'individu. Mais pas de n'importe quel individu, mais bien comme il dit de «l'individu isolé» qui constitue le point de départ de l'analyse microéconomique. L'enjeu de ce point de départ est de placer aux fondements de la valeur les préférences personnelles, les désirs privés de l'individu. L'individu isolé c'est l'autre nom pour désigner la souveraineté du consommateur.

<u>Question 3</u> : Dans la deuxième phrase de ce texte, R.-A. Turgot se réfère à l'usage courant du mot valeur dans le commerce. Lorsque vous achetez tel ou tel bien, quel est ce sens courant de la valeur payée ?

Le sens courant de la valeur des choses dans le commerce est un sens monétaire : telle paire de chaussures valait 90 euros la semaine dernière. Elle vaut désormais en solde 72 euros (soit un rabais de 20%). Dans la vie courante, la monnaie est le langage dans lequel s'exprime la valeur des biens. La comparaison de la monnaie avec le langage a été faite par Turgot lui-même. Elle révèle que la monnaie comporte un certain arbitraire comme signe de la valeur : 70 euros ou 50 dollars désignent la valeur d'un même produit comme sœur et *sister* désignent un même être.

<u>Question 4</u> : Ce n'est pas à ce sens du mot valeur que s'attache Turgot mais à un autre sens. Pour quelle sorte d'homme la valeur analysée par Turgot fait-elle sens ? En quoi son contexte est différent de la valeur courante dans le commerce et quel est alors son rapport avec elle ?

Le sens de la valeur que privilégie Turgot est le sens subjectif, recouvrant la valeur qu'un individu donne à une chose en fonction de ses goûts personnels. Cette perspective amène logiquement Turgot à considérer le cas de l'individu isolé, qui se révèle approprié pour faire l'étude de la valeur subjective des biens car, dans ce contexte, la valeur donnée aux biens n'est polluée par aucune dimension sociale. La valeur que l'individu accorde aux biens n'est pas sous l'influence des autres mais bien de sa seule subjectivité, de sa seule personnalité. Cette valeur subjective est néanmoins une valeur sociale que le marketing a bien intégrée en nous présentant les objets comme répondant à nos désirs privés, dont la consommation est censée alors nous permettre de réaliser ou d'affirmer notre personnalité. Pour Turgot, la valeur monétaire des biens et la valeur subjective ne sont pas deux planètes séparées, sans lien l'une avec l'autre. La valeur subjective est « la première base » de la valeur courante des biens. L'expression monétaire de la valeur des biens reflète la surface des choses dont le fondement se trouve du côté de la valeur subjective.

<u>Question 5</u> : Quel est le premier fondement de la valeur pour Turgot ? Quelles sont les étapes qui amènent l'homme isolé jusqu'à établir un « ordre d'utilité » ?

La première base de la valeur des choses dans le commerce est leur utilité subjective que les mots de « besoin », « goût », « désir » et « jouissance » expriment de manière équivalente aux yeux de Turgot. En effet, tous ces mots véhiculent la dimension privée de l'utilité. La première économie de la valeur est celle de l'utilité subjective, privée dont l'île de *Robinson* figure pour les Modernes le paradigme, l'archétype.

La première étape de la valeur comme utilité subjective correspond au rapport de l'homme isolé avec un seul bien. Cette valeur absolue ne peut faire l'objet d'aucune mesure qui n'apparaît que lorsque l'individu est en présence de plusieurs biens, au moins deux. Alors il juge et mesure la valeur d'un bien relativement à la valeur d'un autre. La deuxième étape est ainsi celle de la valeur subjective relative exprimant les préférences d'un bien au regard d'un autre bien. La troisième étape fait passer de l'immédiateté des besoins à leur prévoyance, à l'établissement d'un ordre d'utilité. Tant que l'individu est soumis à des besoins immédiats, il n'entre pas dans la sphère du calcul, de la stabilité et de l'autonomie. Le philosophe E. Levinas dans *Totalité et infini* a montré le rôle essentiel de l'habitation qui, en permettant le stockage ou l'abri, offre la possibilité de dépasser le stade du besoin immédiat. Établir un ordre d'utilité, devenir autonome par rapport à son environnement supposent d'arriver à une certaine maîtrise du temps.

Question 6 : Quel est le second fondement de la valeur pour Turgot ? En quoi la prise en compte de ce fondement permet de résoudre le paradoxe de la valeur de l'eau qui, si utile à l'homme, n'est pourtant pas « précieuse » dans les pays arrosés ?

Le second fondement est ce que Turgot appelle sa « troisième considération », après les considérations de l'utilité immédiate et instable puis de l'utilité permanente et ordonnée à la base de la valeur des choses dans le commerce. Il s'agit de la difficulté à se procurer les objets qui s'ajoute à leur utilité subjective. Ainsi, deux choses ayant une même utilité aux yeux d'un individu, auront des valeurs différentes si la difficulté à se les procurer n'est pas la même : la chose la plus difficile à se procurer aura la plus grande valeur pour l'individu isolé. Le second fondement de la valeur des choses est ce qu'il en coûte pour les produire et les obtenir. À la différence de l'utilité, le coût de production est un fondement objectif, ne dépendant pas de la subjectivité de l'individu. C'est toutefois toujours un fondement privé, lié à la capacité privée de l'individu à obtenir les biens.

L'ajout du coût en plus de l'utilité dans les déterminants de la valeur permet à Turgot de résoudre le célèbre paradoxe de la valeur selon lequel une chose aussi utile que l'eau n'a point de valeur dans le commerce d'un pays très arrosé. Dans ce cas, l'eau étant infiniment abondante, son coût de production est nul. Il en résulte que sa valeur dans le commerce sera nulle même si son utilité est grande.

Question 7 : En référence à quelle sorte de commerce Turgot introduit-il pour la première fois la notion de « prix » ? Quelles sont alors les composantes de ce prix ? Quel autre nom porte ce concept de prix dans le texte et qu'est-ce qui en fait aux yeux de Turgot la spécificité ?

Turgot parle de prix en référence à ce qu'il appelle « le premier commerce » qu'il situe à la base du commerce courant où les biens se paient en monnaie. Dans ce « premier commerce » qui met en scène un seul individu face à la nature, les biens se paient en travail. Mais le travail n'est pas le seul ingrédient qui entre dans le calcul du prix des biens du premier commerce qui a lieu dans « l'immense magasin de la nature ». Le prix des biens est également proportionné à la jouissance, à l'utilité que l'individu en retire. Au total, dans le premier commerce, le prix des biens est proportionné aux deux déterminants de nature privée de la valeur : l'utilité subjective et le coût de production.

Le prix du premier commerce auquel se livre l'individu isolé est appelé plus loin et de manière théorique par Turgot « la valeur estimative » des biens, qualifiée encore « de première valeur ». La spécificité de la valeur estimative des biens se trouve dans le fait que l'individu la calcule « de son côté », « séparément », « à part ». Bref, la nature première de la valeur des choses est d'ordre privé. L'économie de la valeur est fondamentalement une économie privée.

Question 8 : Pourquoi est-il important pour Turgot que l'échange social avec l'autre se passe toujours dans « l'île déserte », au moins dans un premier temps ?

En effet, l'échange bilatéral, la forme la plus élémentaire de l'échange social, se produit dans le texte de Turgot toujours sur l'île déserte. L'échange social prolonge ainsi l'échange naturel entre l'individu isolé et la nature. L'enjeu de cette mise en scène est de montrer que l'échange social intervient entre deux individus précédemment séparés, isolés. Le lien social de l'échange bilatéral introduit une interdépendance sur la base de l'indépendance de chacun qui n'est pas annulée par l'échange social puisqu'elle lui sert d'assise. Chacun est en mesure de refuser l'échange social. L'interdépendance ne signifie pas la fin de l'indépendance. C'est une in(ter)dépendance, un indépendance qui passe par l'autre.

Question 9 : Quel nouveau nom porte le prix lorsque Turgot envisage l'échange social avec l'autre et non plus seulement l'échange naturel qu'il a nommé « le premier commerce » ? Quel est son rapport avec le prix de l'échange naturel ? Qu'en déduisez-vous en ce qui concerne « la théorie générale des valeurs » que Turgot a élaborée ?

Dans l'échange bilatéral, le prix des biens est désigné par le concept théorique de la « valeur appréciative ». La valeur appréciative de l'échange social est « de même nature » que la valeur estimative de l'échange naturel. Plus précisément, elle forme « une valeur estimative moyenne ». Autrement dit, la valeur appréciative ne recouvre pas un nouveau concept mais correspond à une simple extension à l'échange social du concept basique de la valeur estimative.

La théorie générale des valeurs est donc entièrement contenue dans la valeur des choses telle qu'elle s'établit dans le premier commerce comme s'en étonne Turgot lui-même : « Nous n'avons pas vu naître le commerce ; nous n'avons pas encore assemblé deux hommes, et dès ce premier pas de nos recherches nous touchons à une des plus profondes vérités et des plus neuves que renferme la théorie générale des valeurs (…) la commune mesure de toute les valeurs est l'homme ». Car avant le commerce, il y a la fiction individualiste du premier commerce. La microéconomie n'est pas simplement une méthode d'analyse des marchés, elle est une idéologie qui place l'individu à la base de la société.

Question 10 : Que représente *Robinson Crusoé* pour notre époque actuelle ?

En effet, *Robinson Crusoé*, roman écrit en 1719, est le livre mythique des temps modernes alors que le début du XXI^e^ siècle est souvent qualifié d'époque post-moderne, voire d'hyper-moderne ou d'ultra-moderne. Autrement dit, *Robinson Crusoé*, ce self-made man, est un héros moderne auquel l'on ne croit plus. Sa figure a été déconstruite par l'écriture de nouvelles versions de *Robinson Crusoé* dont celle écrite en français par Michel Tournier en 1967 et intitulée *Vendredi ou les limbes du pacifique*. L'apparition de Vendredi dans le titre, en lieu et place de *Robinson Crusoé*, est une manière d'annoncer que le héros moderne est déboulonné. La croyance au progrès et à la raison dont *Robinson Crusoé* est la figure mythique n'a pas résisté au XX^e^ siècle et à ses horreurs. Toutefois l'horizon chagrin de l'homme, en deuil de son image héroïque du self-made man, reste, dans ces nouvelles versions postmodernes de *Robinson*, celui de son insularité.

Corrigé du TD n°2
Les préférences

Un individu isolé fait face aux paniers de deux biens suivants : A = (5, 3) ; B = (6, 1) ; C = (4, 4) et D = (7 , 2). On sait, d'une part, qu'il procède aux classements suivants : A $\succeq$ C ; B $\succeq$ A et C $\succeq$ D. On sait, d'autre part, que sa relation de préférence est transitive.

Question 1 : Donnez le classement que cet individu opère entre tous les paniers pris deux à deux. Que pouvez-vous en conclure quant aux préférences de cet individu ?

De A $\succeq$ C et C $\succeq$ D, il vient (par transitivité des choix) : A $\succeq$ D. De même, de B $\succeq$ A et A $\succeq$ C, il vient B $\succeq$ C ; enfin, de B $\succeq$ C et C $\succeq$ D, il vient B $\succeq$ D. On montre ainsi que cet individu préfère au moins autant le panier B au panier D, alors que le panier D comporte plus de bien 1 et plus de bien 2 que le panier B. Cet individu est donc en état de satiété.

* * *

L'économie de Robinson comprend deux biens, $h = 1,2$, dont on note respectivement les quantités consommées x_1 et x_2. Les préférences de Robinson relatives aux paniers de biens vérifient les hypothèses habituelles et sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1, x_2) = x_1^{1/2}.x_2$$

Question 2 : Quelles sont les hypothèses habituelles que la microéconomie fait sur les préférences individuelles ?

La relation de préférence est premièrement supposée réflexive, transitive et totale ; elle forme donc un préordre complet sur l'ensemble des paniers de biens. Elle est également supposée continue et croissante (état de non satiété). Enfin, elle est supposée convexe (préférence pour les paniers mixtes par rapport aux paniers extrêmes).

Question 3 : Choisissez une autre fonction $V(x_1, x_2)$ qui représente également les préférences de Robinson et expliquez pourquoi.

La nouvelle fonction d'utilité $V(x_1, x_2) = 5x_1^{1/4}.x_2^{1/2} = 5\sqrt{U(x_1, x_2)}$ représente également les préférences de Robinson. En effet, la relation de préférences (dont Robinson est dotée) correspond à une approche ordinale de l'utilité où seul compte l'ordre de classement des paniers de biens entre eux par Robinson. Elle peut donc être représentée par toute fonction obtenue par une transformation monotone croissante de $U(x_1, x_2)$ telle que pour tout $U \; et \; U' \in \Re$ on a :

$$V(U) > V(U') \quad \Leftrightarrow \quad U > U'$$

Question 4 : À partir de $U(x_1, x_2)$ écrivez l'équation de la courbe d'indifférence associée à un niveau k d'utilité. Montrez que toute courbe d'indifférence associée à un niveau d'utilité k positif est convexe. Qu'en concluez-vous quant aux préférences de Robinson ?

À partir de : $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2}.x_2 = k$, il vient $x_2 = k.x_1^{-\frac{1}{2}} = g(x_1)$

La courbe d'indifférence associée au niveau d'utilité k est convexe si et seulement si $g''(x_1) > 0$.

$g''(x_1) = \frac{3}{4}k.x_1^{-\frac{5}{2}} > 0$ pour tout $x_1 > 0$: les courbes d'indifférence de l'individu sont donc bien convexes.

Ce qui signifie que Robinson a une préférence pour les paniers mixtes de biens.

Question 5 : Donnez la définition du $TMS_{2/1}(x_1, x_2)$ puis vous calculerez sa valeur pour les paniers de biens suivants : (2, 2) ; (1, 4) ; (4 ; 1). Dans quelle mesure peut-on dire que Robinson préfère le bien 2 au bien 1 ?

Le $TMS_{2/1}(x_1, x_2)$ représente, pour un panier donné de biens (x_1, x_2), la quantité de bien 2 que Robinson doit substituer à une petite quantité de bien 1 (très exactement, une quantité infinitésimale) afin de conserver constant le niveau d'utilité associé au panier de bien donné. Cette définition correspond à l'écriture mathématique suivante :

$$TMS_{2/1}(x_1, x_2) = -\frac{dx_2}{dx_1}$$

Afin de calculer la valeur du taux marginal de substitution du bien 2 au bien 1, on utilise alors l'égalité suivante, qui est vraie en tout point d'une courbe d'indifférence :

$$TMS_{2/1}(x_1, x_2) = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{U_1'}{U_2'} = \frac{x_2}{2x_1}$$

D'où $TMS_{2/1}(2, 2) = 0{,}5$; $TMS_{2/1}(4, 1) = 0{,}125$; $TMS_{2/1}(1, 4) = 2$

Si pour le panier de biens (1, 4), Robinson valorise plus le bien 1 que le bien 2, puisqu'il est prêt à échanger contre une unité de bien 1 au moins deux unités de bien 2, cette préférence pour le bien 1 est liée à la composition de ce panier qui comporte beaucoup de bien 2 et très peu de bien 1. La convexité de ses préférences explique alors cette valorisation du bien 1. Mais lorsque Robinson détient un panier avec une quantité égale des deux biens, on observe qu'il a une préférence pour le bien 2 dans la mesure où contre une unité de bien 1 il demande seulement une demi unité de bien 2. Si sa préférence pour les paniers mixtes le conduit à valoriser le bien 1 lorsqu'il est en possession de paniers ayant très peu de bien 1 et beaucoup de bien 2, Robinson a une préférence « pure » pour le bien 2 qui s'exprime lorsque les paniers de biens contiennent une quantité égale des deux biens.

Question 6 : Donnez la définition du $\mathrm{TMS}_{1/2}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ puis vous le calculerez pour les paniers de biens suivants : (2, 2) ; (1 ; 4) ; (4 ; 1). Comparez vos résultats avec ceux de la question précédente.

Le $TMS_{1/2}(x_1, x_2)$ représente, pour un panier de biens donné (x_1, x_2), la quantité de bien 1 que Robinson doit substituer à une petite quantité de bien 2 (très exactement, une quantité infinitésimale) afin de conserver constant le niveau d'utilité associé au panier de bien donné. Cette définition correspond à l'écriture mathématique suivante :

$$TMS_{1/2} = -\frac{dx_1}{dx_2}$$

D'où l'on déduit le résultat suivant :

$$TMS_{1/2}(x_1, x_2) = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{U_2'}{U_1'} = \frac{2x_1}{x_2}$$

Les valeurs du $\mathrm{TMS}_{1/2}$ pour chaque panier de biens sont les valeurs inversées de celles que l'on a obtenues dans la question précédente ; en effet, on a :

$$TMS_{1/2}(x_1, x_2) = \frac{1}{TMS_{2/1}(x_1, x_2)}$$

Question 7 : Vous donnerez des deux TMS une interprétation en terme de prix.

Interprété dans l'économie de Robinson, le $TMS_{2/1}(x_1, x_2)$ représente la quantité de bien 2 que Robinson se demande à lui-même en échange d'une unité du bien 1 : c'est le prix relatif du bien 1 (en quantité de bien 2) que calcule Robinson en se plaçant du seul point de vue de ses préférences. C'est un prix relatif, c'est-à-dire prix réel qui ne fait intervenir que des quantités de biens sans référence à la monnaie. Dans le TD précédent, nous avons vu que pour Turgot les désirs privés sont à la base des prix monétaires, en contiennent la vérité. Ce prix relatif que constitue le $TMS_{2/1}(x_1, x_2)$ a encore deux autres caractéristiques : il est de nature privée, lié à un individu, et subjective, lié à ses goûts personnels. Le même raisonnement conduit à interpréter le $TMS_{1/2}(x_1, x_2)$ comme le prix relatif du bien 2 (en quantité de bien 1) dont la nature est également privée et subjective. À la base des prix monétaires des biens dans le commerce, Turgot et la microéconomie forgent un concept tout à fait particulier de prix : un prix réel, privé et subjectif.

* * *

Dans une nouvelle économie de Robinson, un nouveau Robinson a des préférences sur les paniers de biens qui sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1, x_2) = \left((x_1)^2 + (x_2)^2\right)^{1/2}$$

Question 8 : Tracez la courbe d'indifférence associée au niveau d'utilité U = 4. Commentez-la.

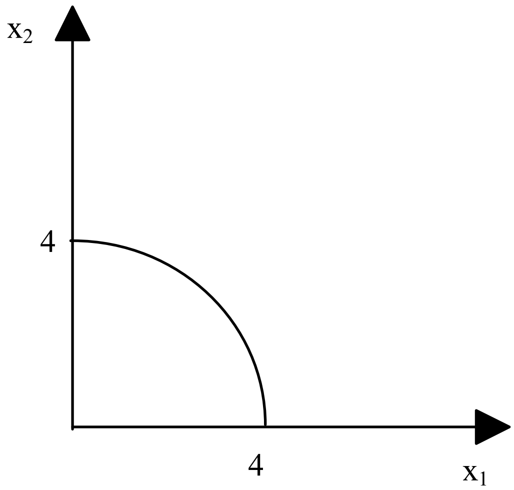
Les courbes d'indifférence vérifient les équations de la forme :

$$\left((x_1)^2 + (x_2)^2\right)^{1/2} = U$$

Soit encore :

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = U^2$$

On est donc en présence de quart de cercles (dans l'orthan positif), centrés à l'origine et de rayon U. Soit la représentation suivante pour $U = 4$:



Question 9 : Les utilités marginales des biens sont-elles croissantes ou décroissantes ?

Les utilités marginales sont données par :

$$U_1'(x_1, x_2) = x_1\left((x_1)^2 + (x_2)^2\right)^{-1/2}$$

$$U_2'(x_1, x_2) = x_2\left((x_1)^2 + (x_2)^2\right)^{-1/2}$$

Afin de répondre à la question de savoir si elles sont croissantes, il faut calculer leurs dérivées. Prenons l'utilité marginale du bien 1, sa dérivée sera de la forme :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec $u = x_1 \quad et \quad v = \left((x_1)^2 + (x_2)^2\right)^{1/2}$

On établit ainsi que :

$$U_{11}'' = \frac{(x_2)^2}{\left((x_1)^2 + (x_2)^2\right)^{3/2}} > 0 \quad pour\ x_h > 0$$

L'utilité marginale du bien 1 est donc toujours croissante (idem pour l'utilité marginale du bien 2). Il est à noter que dans le cadre de l'économie de Robinson, un individu dont les préférences sont concaves l'amènent à faire des choix de consommation qui sont tout à fait acceptables (ce qui ne l'est plus dans le cadre de l'économie concurrentielle, car alors les demandes discontinues qui en découlent peuvent impliquer l'inexistence du prix d'équilibre concurrentiel).

<u>Question 10</u> : Calculez le TMS du bien 2 au bien 1 et commentez-le.

À partir de la question 9, on calcule :

$$TMS_{2/1} = \cancel{\frac{\partial x_2}{\partial x_1}} = \frac{U_1'}{U_2'} = \frac{x_1\left((x_1)^2 + (x_2)^2\right)^{-1/2}}{x_2\left((x_1)^2 + (x_2)^2\right)^{-1/2}} = \frac{x_1}{x_2}$$

Le $TMS_{2/1}(x_1 x_2)$ est donc croissant par rapport aux quantités de bien 1 et décroissant par rapport aux quantités de bien 2, ce qui représente une valorisation relative inversée des biens par rapport au cas d'un Robinson avec préférences convexes. Dans le cas d'un Robinson aux préférences concaves comme celui-ci, plus son panier comporte d'un bien plus il valorise ce bien abondant par rapport à l'autre. On remarque ainsi que la psychologie d'un Robinson aux préférences concaves le conduit à établir un prix subjectif qui ne reproduit pas la « loi du marché » selon laquelle, toutes choses égales par ailleurs, plus un bien y est abondant plus son prix baisse ou, inversement, plus un bien est rare plus son prix augmente. Au contraire, lorsque Robinson a une préférence pour les paniers mixtes, sa psychologie mime la loi du marché en fixant un prix relatif subjectif d'autant plus élevé que le bien en question est « rare » dans son panier de bien.

Corrigé du TD n°3
Les techniques

Dans l'économie de Robinson envisagée dans le TD n°2, ce dernier dispose de t heures totales de travail pour produire les biens 1 et 2 qu'il répartira entre un temps consacré à la production de bien 1, noté t_1, et un temps consacré à la production de bien 2, noté t_2. On note y_1 et y_2 les quantités produites par Robinson respectivement de bien 1 et de bien 2.

Ses techniques de production sont alors représentées par les 3 équations suivantes :

(1) $y_1 = f_1(t_1) = t_1^{1/2}$

(2) $y_2 = f_2(t_2) = 2.t_2$

(3) $t = t_1 + t_2$

Question 1 : Vous commenterez les techniques de Robinson en termes de productivités, de coûts réels et de rendements d'échelle.

Dans la production du bien 1, la productivité moyenne est égale à :

$$PM_1 = \frac{y_1}{t_1} = \frac{t_1^{1/2}}{t_1} = \frac{1}{t_1^{1/2}}$$

Elle est donc décroissante puisqu'on a : $PM_1' = -\frac{1}{2t_1^{3/2}} < 0$

Dans la production du bien 2, la productivité moyenne est constante et égale à :

$$PM_2 = 2$$

En ce qui concerne la productivité marginale du travail, elle est dans la production du bien 1 égale à :

$$Pm_1 = f_1'(t_1) = \frac{1}{2} t_1^{-1/2}$$

Elle est donc décroissante puisque sa dérivée est de signe négatif :

$$Pm_1' = -\frac{1}{4} t_1^{-3/2} < 0$$

Ainsi, plus Robinson augmente sa quantité de travail pour produire du bien 1, plus les suppléments de production de bien 1 qu'il obtient avec une heure supplémentaire de travail sont faibles. Dans la branche 2, la productivité marginale du travail est égale à sa productivité. Elle est donc constante. L'efficacité d'une heure supplémentaire de travail est toujours la même dans la production du bien 2.

Le coût moyen réel de la production du bien 1 mesure la quantité de travail que chaque unité de production de bien 1 a en moyenne coûtée. C'est donc l'inverse de la productivité moyenne du travail dans la branche 1. Soit :

$$CM_1 = \frac{t_1}{y_1} = t_1^{1/2}$$

Aussi, le coût moyen réel est-il croissant dans la branche 1 (sa dérivée première étant positive). Le coût marginal du bien 1 représente la quantité de travail que la production d'une unité supplémentaire du bien 1 nécessite. Soit :

$$Cm_1 = \frac{dt_1}{dy_1} = \frac{1}{Pm_1} = \frac{2}{t_1^{-1/2}}$$

Le coût marginal du bien 1 est par définition l'inverse de la productivité marginale du travail dans la production de bien 1. Il est par conséquent croissant avec :

$$Cm_1' = t_1^{-1/2} > 0$$

Plus la quantité produite de bien 1 augmente, plus l'unité supplémentaire de bien 1 sera coûteuse en travail à produire. (On conduit le même raisonnement pour la branche 2).

Enfin, les rendements d'échelle sont dans chaque branche de même nature que la productivité marginale du travail, puisque nous sommes dans le cas de production à un seul facteur. Pour la production du bien 1, on montre ainsi que :

$$f_1(\lambda t_1) = (\lambda t_1)^{1/2} = \lambda^{1/2} f_1(t_1) < \lambda f_1(t_1)$$

Lorsqu'on multiplie par $\lambda > 0$ la quantité de travail dans la production de bien 1, la quantité produite de bien 1 est multipliée par moins que λ. On vérifie que les rendements d'échelle sont à l'image de la productivité marginale du travail décroissants dans cette branche de production.

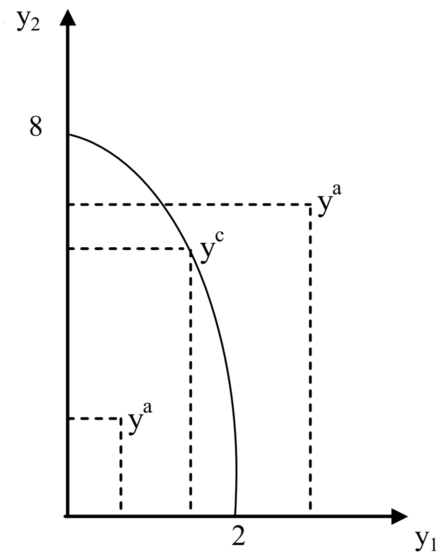
Au total, Robinson dispose d'un avantage comparatif dans la production de bien 2 puisque sa productivité marginale de son travail y est constante alors qu'elle est décroissante dans la production du bien 1.

Question 2 : Vous déduirez des équations 1, 2 et 3, l'équation de la frontière des possibilités techniques de production (FPTP). Vous commenterez celle-ci en vous aidant de sa représentation graphique en prenant $t = 4$.

Des équations (1), (2) et (3), il vient aisément :

$$y_2 = h(y_1) = -2y_1^2 + 2t$$

Pour $t = 4$, la frontière des possibilités techniques de production (FPTP) a alors la forme suivante :



La FPTP représente l'ensemble des bilans de production à la fois efficaces et techniquement possibles. Ainsi, le bilan $y^a = (y_1^a, y_2^a)$, situé en dessous de la FPTP, correspond à un bilan de production inefficace : la quantité totale de travail, $t = 4$, est soit utilisée inefficacement soit elle n'est pas totalement utilisée. Différemment, le bilan de production y^b représente un bilan de production qui n'est pas techniquement possible étant données la quantité totale de travail disponible et les techniques utilisées. Enfin, si Robinson utilise efficacement tout son temps de travail disponible dans la production de bien 1, il atteindra une production maximale égale à 2, alors que s'il l'utilise dans la production de bien 2, il obtiendra une production maximale égale à 8. On retrouve sous une autre forme, l'avantage comparatif dont Robinson dispose dans la production de bien 2. La difficulté pour Robinson à se procurer le bien 1 est plus grande que celle à se procurer le bien 2 pour parler comme Turgot.

Question 3 : Que représente la pente en valeur absolue de cette frontière ? Calculer-la pour $\mathrm{y}_1 = \frac{1}{2}$ et pour $\mathrm{y}_1 = 1$. Qu'en déduisez-vous quant aux capacités productives de Robinson dans chaque branche ?

La pente en valeur absolue de la FPTP, égale à $-\mathrm{h}'(\mathrm{y}_1)$, représente le taux d'échange technique de l'output 2 à l'output 1 : autrement dit, la quantité de bien 2 qu'il sera possible à Robinson de produire en plus lorsqu'il diminue d'une unité sa production de bien 1. Ce taux d'échange de l'output 2 à l'output est le pendant du côté des techniques du taux marginal de substitution entre les biens du côté des préférences. Son calcul donne la valeur suivante :

$$-h'(y_1) = 4y_1$$

Sa valeur dépend donc du bilan de production pour lequel elle est calculée. Ainsi on a pour $y_1 = 0{,}5$, un taux d'échange technique égal à 2. Lorsque Robinson produit une demi unité de bien 1, la diminution d'une quantité infiniment petite de l'output 1 lui permettra d'augmenter de deux unités sa production de bien 2. Pour un bilan de production comprenant une quantité d'output 1 plus élevée, égale à 1 au lieu d'une demi, le taux d'échange technique de l'output 2 augmente et passe à 4.

On voit donc que plus la quantité produite de bien 1 est élevée, plus la diminution de la production de bien 1 permet d'obtenir des quantités élevées de bien 2 en échange. Cela traduit le fait que les rendements d'échelle sont décroissants dans la production de bien 1 alors qu'ils sont constants dans la branche 2.

Question 4 : Donnez une interprétation en terme de prix des deux TMST qui caractérisent les techniques de production de Robinson.

Pour interpréter les deux TMST en termes de prix, on exprimera la valeur absolue de la pente de la FPTP en termes de productivités marginales du travail dans les branches, selon l'égalité suivante :

$$-h'(y_1) = \frac{f_2'(t_2)}{f_1'(t_1)}$$

Exprimé de cette manière, le taux marginal de substitution technique de l'output 2 à l'output 1 représente la productivité marginale relative du bien 2 par rapport à celle du bien 2. Pour aboutir à une expression en termes de prix, il suffit alors de poser que la productivité marginale du travail dans une branche n'est jamais que l'inverse du coût marginal du bien. Ce qui conduit à écrire l'égalité suivante :

$$-h'(y_1) = \frac{Cm_1}{Cm_2} = 4y_1$$

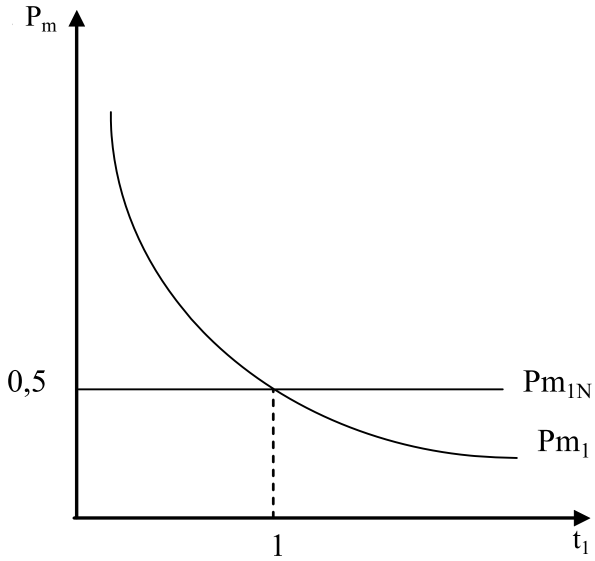
Le $TMST_{2/1}$ s'interprète donc comme le coût marginal relatif du bien 1. Pour un bilan de production comprenant une demi unité de bien 1, le coût marginal relatif du bien 1 est deux fois supérieur à celui du bien 2 : la dernière unité d'output 1 a coûté deux fois plus de travail que la dernière unité produite d'output 2. Ce coût relatif du bien 1 passe à 4 pour un bilan de production comprenant une unité d'output 1. On observe que le coût marginal relatif du bien 1 est croissant avec la quantité produite de bien 1. Inversement, le $TMST_{1/2}$ représente le coût marginal relatif du bien 2. Après les TMS entre les biens exprimant leur valorisation relative du point de vue des préférences, constituant des prix relatifs subjectifs, les TMST entre les outputs expriment la difficulté relative à les produire à travers la notion de coût réel.

Après de nombreuses nuits passées à réfléchir et faire des essais, Robinson a mis au point une nouvelle technique pour produire du bien 1, qui est représentée par la nouvelle fonction de production $y_1 = f_{1N}(t_1) = \frac{1}{2}t_1$.

Question 5 : Calculez la nouvelle productivité marginale dans la branche 1. Quelle est sa nature ?

$Pm_{1N} = \frac{1}{2}$. Sa dérivée étant nulle, la productivité marginale du travail est donc devenue constante dans la production de bien 1.

Question 6 : Comparez cette nouvelle productivité marginale avec la précédente après les avoir représentées graphiquement. Commentez.

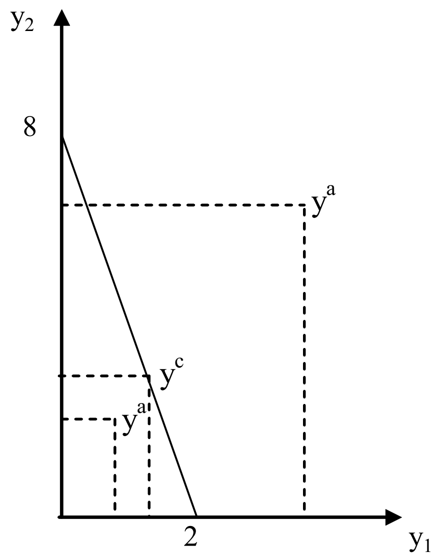


Lorsque la quantité de travail utilisée dans la production du bien 1 est inférieure à l'unité, la nouvelle productivité marginale du travail est inférieure à la précédente. Mais, dès que la quantité utilisée de travail est supérieure à l'unité, la nouvelle productivité de l'heure supplémentaire surpasse la précédente, avec un écart croissant avec la quantité de travail.

Question 7 : Déterminez la nouvelle équation de la frontière des possibilités techniques de production. Représentez celle-ci pour $t = 4$ et commentez-la.

En utilisant la fonction de production représentant les nouvelles techniques, l'équation pour la FPTP que l'on obtient est la suivante :

$$y_2 = h_N(y_1) = -4y_1 + 2t$$



Si les coordonnées de la FPTP sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées restent les mêmes, la forme de la FPTP est désormais celle d'une droite, traduisant le fait que dans les deux branches, les rendements d'échelle sont constants. Le taux d'échange technique entre les outputs ne varie plus en fonction des quantités produites dans chaque branche.

Question 8 : Après avoir calculé le taux marginal de substitution technique entre les outputs, vous l'interpréterez en termes de coût marginal relatif.

Le taux marginal de substitution technique de l'output 2 à l'output 1 est désormais égal à 4. Autrement dit, quel que soit le bilan de production atteint par Robinson, le coût marginal relatif du bien 1 y sera toujours quatre fois supérieur à celui du bien 2 : la dernière unité de bien 1 produite nécessitera toujours quatre fois plus de travail que la dernière unité produite d'output 2. En termes de coût, le bien 2 est quatre fois moins cher que le bien 1, quatre fois moins difficile à obtenir.

Corrigé du TD n°4
L'échange naturel

On reprend les données de l'économie de Robinson des TD n° 2 et 3, relatives à la fois aux préférences (à savoir $U(x_1,x_2) = x_1^{1/2}.x_2$) et aux techniques de Robinson (à savoir, $y_2 = h(y_1) = -2.y_1^2 + 2.t$), en considérant toujours sa quantité de travail t fixée de manière exogène.

Question 1 : Écrivez le calcul que fait Robinson (en utilisant la frontière des possibilités de production). Commentez ce programme et écrivez le Lagrangien qui permet de le résoudre.

Calcul de Robinson :

$$\underset{(x_1,x_2)}{\text{Max}}\ \mathrm{U}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) = \mathrm{x}_1^{1/2}\mathrm{x}_2$$

s.c. $y_2 - h(y_1) = 0$ avec $h(y_1) = -2(y_1)^2 + 2t$

s.c. $x_1 > 0$ *et* $x_2 > 0$

s.c. $x_1 = y_1$ *et* $x_2 = y_2$

L'objectif de Robinson est de calculer la composition du panier de biens qui maximise son utilité. Ce calcul est un calcul marchand en ce sens qu'il revient à déterminer quelles sont les quantités de biens qui, en échange de son travail, égalisent l'offre à la demande de Robinson pour chaque bien. Mais ce calcul marchand lorsqu'il est effectué par Robinson revêt un autre enjeu qui est celui de la réalisation d'une vie indépendante, autonome par l'emploi de son propre travail. Le versant consommateur, avec la satisfaction retirée des biens souhaités, n'est pas détachable du mode d'accès aux biens qui engage la capacité pour Robinson à mener une vie indépendante, solitaire.

Robinson est une économie de marché à lui tout seul, laquelle est certes gouvernée par la rationalité économique (individuelle) qui revient à obtenir le plus avec le moins, mais sans que cette rationalité soit détachée de la visée qui l'anime dans le mythe de Robinson, celle de la vie autonome. Le calcul marchand est ainsi pris dans une visée qui le conditionne et lui impose une dimension qualitative.

Le Lagrangien $L(x_1,x_2,\lambda)$ s'écrit :

$$L(x_1,x_2,\lambda) = U(x_1,x_2) + \lambda(x_2 - h(x_1))$$

Question 2 : Pourquoi l'étude de la condition de premier ordre est-elle ici suffisante ?

L'étude de la condition de premier ordre est ici suffisante car nous savons que les courbes d'indifférence sont convexes (voir question 4, TD n°2), ce qui est une condition équivalente à la condition de second ordre. L'extremum obtenu pour la fonction d'utilité sous contrainte est donc aussi un maximum en raison de la convexité des préférences de Robinson. Si tel n'avait pas été le cas, la solution obtenue avec la condition de premier ordre aurait déterminée un panier de biens associé à une utilité minimum

Question 3 : Déterminez le panier optimal de biens que Robinson produira et consommera. Le calculer pour $t = 4$. Quelle propriété vérifie le panier de biens d'équilibre ? Commentez-la.

La condition de premier ordre correspond au système d'équations suivantes :

(1) $$\frac{\partial L}{\partial x_1} = U'_1(x_1, x_2) - \lambda . h'(x_1) = 0$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial x_2} = U'_2(x_1, x_2) + \lambda = 0$$

(3) $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_2 - h(x_1) = 0$$

De (1) et (2), par élimination de λ, il vient :

(4) $$x_2 = 8.x_1^2$$

De (3) et (4), on obtient :

$$x_1^* = \sqrt{\frac{L}{5}}$$

D'où :

$$x_2^* = \frac{8L}{5}$$

Pour L = 4, on obtient :

$$(x_1^* = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}89 \,;\, x_2^* = 6{,}4)$$

On a alors : $t_1^* = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5} = 0{,}8$ et $t_2^* = \frac{\frac{32}{5}}{2} = \frac{32}{10} = 3{,}2$

À partir des équations (1) et (2), on montre qu'à l'équilibre, le panier de biens vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{U_1^{'}}{U_2^{'}} = -h'(x_1)$$

Autrement dit, le panier optimal est tel que le taux marginal de substitution entre les biens (i.e. leur taux d'échange subjectif) est égal à leur taux d'échange technique. En effet, pour le panier optimal, on vérifie que :

$$\frac{U_1^{'}}{U_2^{'}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad -h'(x_1) = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

En montrant que le taux d'échange technique est égal pour tout bilan $y = (y_1, y_2)$ de production à :

$$-h'(x_1) = -\cancel{\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{f_2^{'}(t_1)}{f_1^{'}(t_2)}}$$

[illegible]

et en rappelant ensuite que la productivité marginale du travail dans une branche de production est l'inverse du coût marginal de production :

$$f_h^{'}(L_h) = \frac{1}{Cm_h(y_h)}$$

On arrive finalement à montrer que le panier de biens vérifie à l'équilibre l'égalité suivante :

$$\frac{U_1^{'}(x_1)}{Cm_1(y_1)} = \frac{U_2^{'}(x_2)}{Cm_2(y_2)}$$

Cette égalité exprime la seconde loi de Gossen dans le cadre de l'économie de Robinson, dans lequel les quantités consommées des biens par Robinson sont telles que leurs utilités marginales pondérées par leurs coûts marginaux sont égales entre elles. Par rapport à l'expression de la seconde loi de Gossen en concurrence parfaite, les coûts marginaux se sont substitués aux prix concurrentiels. On peut ici dire que l'économie de concurrence parfaite ne déformera pas les termes de l'échange par rapport à leur expression naturelle, si et seulement si le prix concurrentiel des bien est égale à leur coût marginal.

Question 4 : On suppose un choc sur les préférences de Robinson qui sont désormais représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1, x_2) = x_1 . x_2$$

Calculez le nouveau panier optimal de biens de Robinson et le prix des biens à l'équilibre. Comparez avec les résultats de la question 4.

Sans détailler les calculs développés dans la question 3, on obtient finalement :

$$(x_1* = \sqrt{\frac{L}{3}} \,;\, x_2* = \frac{4L}{3})$$

En reprenant $t = 4$, on obtient :

$$(x_1* = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}15 \,;\, x_2* = 5{,}33)$$

La préférence plus grande pour le bien 1 après le choc se traduit par une plus grande consommation de bien 1 et une plus faible consommation de bien 2. On remarque que la même valorisation subjective des biens ($TMS_{2/1} = 1$ pour les paniers équilibrés contenant la même quantité des deux biens) ne conduit pas à la même quantité de bien 1 et 2 consommée à l'équilibre, mais à une quantité consommée de bien 2 plus grande que celle du bien 1 en raison d'une difficulté relative plus grande pour Robinson à produire du bien 1.

Le prix relatif (aussi bien subjectif qu'objectif) du bien 1 à l'équilibre est maintenant plus élevé puisqu'il est égal à $\frac{8}{\sqrt{3}}$ alors qu'il était précédemment égal à $\frac{8}{\sqrt{5}}$. Le choc sur les préférences en faveur du bien 1 a augmenté la rareté relative du bien 1, qui, toutes choses égales par ailleurs, est plus recherché ou demandé par Robinson, ce qui a pour conséquence d'élever son prix relatif d'équilibre. L'économie de Robinson dévoile ainsi les mécanismes élémentaires de la valeur des biens sur les marchés.

Question 5 : On admet cette fois un choc sur les techniques de Robinson dans la production du bien 1 désormais représentées par la fonction de production suivante :

$$y_1 = f_1(t_1) = t_1$$

Calculez le nouveau panier optimal de biens (en considérant les préférences initiales) et le prix des biens à l'équilibre. Comparez avec vos résultats aux questions 3 et 4 précédentes.

Les calculs aboutissent à :

$$(x_1* = \frac{L}{3} \,;\, x_2* = \frac{4}{3}L)$$

En prenant $t = 4$, on obtient alors :

$$(x_1* = 1{,}33 \,;\, x_2* = 5{,}33)$$

Là encore, le panier de consommation (par rapport à celui de la question 3) a été modifié contenant plus de bien 1 et moins de bien 2, mais pour des raisons différentes que celles observées dans la question 4. Cette fois l'augmentation de la quantité consommée de bien 1 à l'équilibre est due à la moindre difficulté de production du bien 1 suite au choc sur les techniques. Cette diminution du coût réel de production du bien 1 a en fait deux effets : un effet substitution qui ici tend à substituer de la production de bien 1 à celle de bien 2 dont le coût relatif a augmenté, et un effet richesse puisque toutes choses égales par ailleurs la baisse du coût réel accroît les consommations possibles, allant dans le sens d'une augmentation de la quantité des deux biens. Si, au total, la quantité de bien 2 a diminué à l'équilibre, c'est donc que l'effet substitution l'a emporté sur l'effet richesse.

Le prix d'équilibre (subjectif et objectif) du bien 1 est désormais égal à 2 alors qu'il était dans la question 3 égal à $\frac{2L}{\sqrt{5}}$ ($\approx 3{,}6$ avec $t = 4$). Son prix a donc ici diminué en raison de son coût relatif plus faible. On remarque qu'avec les nouvelles techniques à rendements constants dans les branches, le prix relatif d'équilibre ne varie plus avec les quantités consommées ; il est constant, déterminé par les seules conditions techniques. On retrouve avec ce cas particulier, la thèse des économistes classiques, y compris de Marx, pour lesquels la valeur d'échange ne dépendait que du prix naturel des biens, c'est-à-dire de leur prix en travail.

Question 6 : Comment peut-on interpréter le changement de techniques dans le cadre de l'économie de Robinson ? Que peut-on en déduire pour les économies de marché actuelles ?

Le changement des techniques par rapport à la question 3 permet à Robinson d'atteindre un niveau d'utilité plus élevé de consommation pour les deux biens (et donc d'utilité). On a ici une croissance de l'économie de Robinson, avec gain en bien-être, en raison de gains de productivité dans la branche 1. Ici, ces gains de productivité sont comme tombés du ciel. Ils sont néanmoins coûteux à obtenir, supposant un investissement en capital humain de la part de Robinson. Ce mécanisme d'investissement en capital humain avec l'amélioration de la productivité qui en résulte dévoile les fondements réels de la croissance des économies de marché.

Corrigé du TD n°5
Le contrat naturel de travail

Dans cette nouvelle économie de Robinson, on note X la quantité du seul bien de consommation et L la durée du travail, avec $0 \leq L \leq T$, où T est le nombre total d'heures dont dispose Robinson. La répartition de T entre un temps de travail et un temps de loisir relève désormais du choix de Robinson, qu'il fera en fonction de ses préférences et de ses techniques.

Les préférences de Robinson relatives à la consommation et au travail sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

(1) $U(X, L) = X(T - L)$

Ses techniques sont données par la fonction de production ci-dessous, où Y désigne la quantité produite du bien de consommation :

(2) $Y = f(L) = 2.L$

Question 1 : Étudiez et commentez la nouvelle fonction d'utilité de Robinson.

On a : $U'_X = T - L > 0$ et $U'_L = -X < 0$

Si l'utilité est une fonction croissante de la consommation, elle est une fonction décroissante de la durée du travail ; le travail est facteur de désutilité pour Robinson. Cette désutilité pour le travail peut également s'interpréter comme une préférence pour le loisir.

La fonction d'utilité exprime que le travail pour Robinson a un sens instrumental : c'est un moyen utilisé pour une fin qui lui est extérieure, à savoir la consommation. Comme moyen, c'est un coût à minimiser.

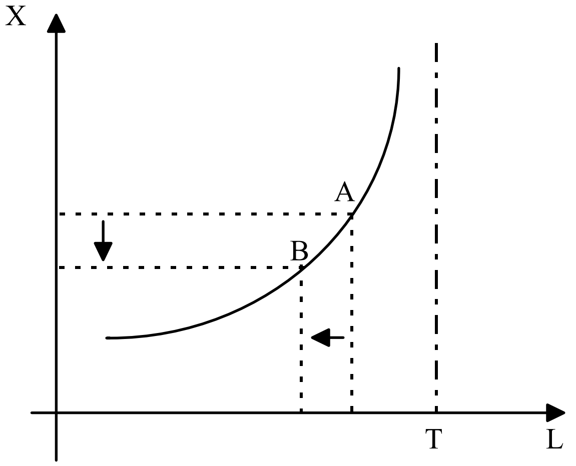
En développant la fonction d'utilité, celle-ci s'écrit :

$$U(X, L) = XT - XL$$

On retrouve alors une forme équivalente à la fonction de profit de la firme avec le côté recette qui a pour contenu ici la consommation et un côté coût qui a pour contenu ici le travail. Robinson, à travers sa fonction objectif, intègre les volets consommation et production d'une économie de marché. Enfin, si le travail est dans sa fonction d'utilité l'équivalent d'un coût pour Robinson, celui-ci y fait l'objet d'une évaluation subjective qui n'est pas séparable de la visée d'une vie autonome pour Robinson.

Question 2 : Définissez le $TMS_{X/L}(X, L)$, puis vous le déterminerez.

Le taux marginal de substitution de la consommation au travail, pour un panier (X, L) donné, mesure la quantité de consommation que Robinson doit substituer à une diminution infinitésimale de sa durée du travail, afin qu'il conserve constant son niveau d'utilité. La quantité de consommation à substituer est ici négative, comme on l'observe sur le graphique ci-dessous :



Quant au point A, Robinson diminue d'une unité sa durée du travail, c'est une baisse de sa consommation qui permet de maintenir constant son niveau d'utilité, graphiquement de rester sur sa même courbe d'indifférence. De sorte que les variations sont ici de même signe. Nous n'aurons donc pas besoin de faire précéder du signe négatif le $TMS_{X/L}$, car ce taux est positif. On écrira donc :

$$TMS_{X/L}(X, L) = \frac{dX}{dL}$$

En utilisant la propriété selon laquelle, en tout point d'une courbe d'indifférence, la variation totale d'utilité est nulle lorsque X et L varient, on obtient :

$$dU = U'_X . dX + U'_L . dL = 0$$

d'où :

$$\frac{dX}{dL} = -\frac{U'_L}{U'_X}$$

On peut alors déterminer le $TMS_{X/L}$ de Robinson :

$$TMS_{X/L}(X, L) = -\frac{-X}{T - L} = \frac{X}{T - L}$$

En terme économique, ce taux s'interprète comme le prix relatif subjectif du travail. En effet, il définit la quantité de consommation que Robinson exige au moins en échange de l'augmentation d'une unité de son travail ou, de manière équivalente, la quantité de consommation qu'il est prêt à perdre en contre partie d'une diminution d'une unité de sa quantité de travail. Ce taux mesure le prix subjectif de l'heure supplémentaire de travail pour Robinson. Il est croissant avec la quantité de travail dépensée par Robinson. Plus Robinson travaille, plus l'heure supplémentaire de travail a une désutilité importante nécessitant une quantité élevée de consommation pour être compensée. On peut dire qu'il n'a pas d'addiction au travail.

Question 3 : Commentez la fonction de production.

C'est une fonction à rendement d'échelle constant : $f(\lambda L) = \lambda f(L)$

La productivité du travail est également constante :

$$Pm(L) = f'(L) = 2 \text{ avec } Pm'(L) = 0$$

Pour toute fonction de production à un seul facteur, rendement d'échelle et productivité du facteur sont de même nature.

Question 4 : Écrivez le nouveau calcul que fait Robinson. Le commenter. Puis déterminez la durée optimale de travail et la quantité optimale de consommation.

Le calcul de Robinson est désormais le suivant :

$$\begin{aligned}
&\underset{X,L}{Max}\, U(X,L) = X(T-L) \\
&s.c. \quad Y = f(L) = 2L \\
&s.c. \quad X = Y
\end{aligned}$$

Ici encore, on remarque que Robinson constitue un marché à lui tout seul, puisque la deuxième contrainte peut s'interpréter comme l'égalité de l'offre et de la demande sur le marché du bien de consommation. Ce calcul de maximisation de l'utilité sous contrainte va permettre à Robinson de déterminer sa durée optimale de travail ainsi que sa consommation optimale.

On peut ici résoudre ce calcul en utilisant la méthode de substitution, de sorte qu'il s'écrit, après substitution :

$$\underset{L}{Max}\, U(L) = 2L(T-L)$$

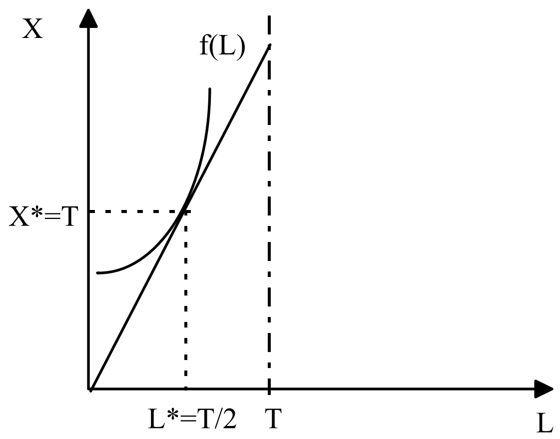
La condition de premier ordre est alors :

$$U'(L) = 0$$

d'où l'on déduit les termes du contrat naturel de travail :

$$L^* = \frac{1}{2}T \quad \text{et} \quad X^* = T$$

Question 5 : Vous représenterez l'équilibre de Robinson et commenterez sa propriété.



Les quantités du contrat naturel de travail vérifient l'égalité entre le $TMS_{X/L}$ et la productivité marginale du travail $f'(L)$. En effet, à l'équilibre on a bien :

$$TMS_{X/L} = \frac{X^*}{T - L^*} = \frac{T}{T - \frac{1}{2}T} = 2 \qquad \text{et} \quad f'(L) = 2$$

On peut également lire cette propriété en inversant chaque membre de l'égalité qui devient l'égalité entre le prix relatif subjectif du bien et son coût marginal réel :

$$TMS_{L/X} = \frac{1}{TMS_{X/L}} = \frac{1}{2} \quad Cm(Y) = \frac{1}{f'(L)} = \frac{1}{2}$$

Question 6 : Après un choc exogène, les préférences de Robinson sont modifiées et la nouvelle fonction d'utilité qui les représente s'écrit :

(1)' $\quad U(X, L) = X^2(T - L)$

Après avoir interprété ce choc exogène, vous calculerez la nouvelle durée optimale de travail et la nouvelle quantité optimale de consommation que Robinson choisit. Vous les commenterez.

Ce choc exogène représente une préférence de la consommation plus importante relativement à la désutilité du travail (ou préférence pour le loisir) qui n'a pas été modifiée. Pour donner un peu de réalité à ce choc exogène, on peut suggérer une modification du bien de consommation lui-même dont les nouvelles caractéristiques sont alors plus appréciées de Robinson.

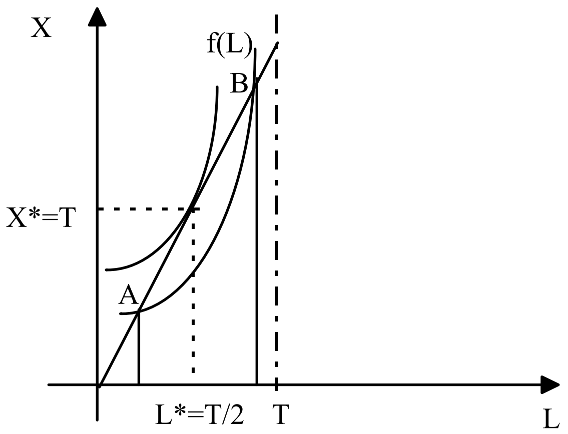
Sans détailler les calculs précédents, la résolution du calcul de Robinson avec sa nouvelle préférence pour la consommation aboutit aux quantités optimales suivantes :

$$L^* = \frac{2}{3}T \qquad \text{et} \qquad X^* = \frac{4}{3}T$$

Une préférence pour la consommation plus forte se traduit, toutes choses égales par ailleurs, par une augmentation de la durée optimale du travail de Robinson et par une augmentation de son niveau optimal de consommation. Suite à sa préférence plus grande pour le bien de consommation, Robinson a donc travaillé plus pour consommer plus.

En raison des rendements d'échelle constants, on remarque que le prix relatif du travail à l'équilibre ne dépend pas de la composition du panier de biens d'équilibre ; il est toujours égal à 2. Il ne dépend donc pas des préférences, mais est entièrement déterminé par les conditions techniques de production.

Question 7 : Dans ce contrat naturel que Robinson passe avec lui-même face à la nature, comment peut-on interpréter (en vous aidant d'une représentation graphique) un encadrement de la durée du travail ?



Un encadrement autoritaire du travail, soit limitant la durée du travail en dessous de L* comme dans la situation représentée par le point A, soit augmentant la durée du travail au dessus de L* comme dans la situation représentée par le point B, aura pour conséquence une diminution du bien-être de Robinson. Autrement dit, l'encadrement de la durée du travail ne peut s'interpréter que comme une mesure fondée sur une raison qui n'est pas le bien-être de Robinson. Une mesure donc qui contrevient à la fiction individualiste.

Il ne faut pas trop vite en conclure à la non pertinence de tout encadrement de la durée du travail. Car la réalité n'est pas la fiction. La condition des travailleurs indépendants est, dans notre société, celle qui se rapproche le plus de la fiction. Elle ne fait d'ailleurs pas l'objet d'un encadrement légal. Par contre, la condition du salarié en est éloignée puisque son contrat de travail n'est pas de même nature que le contrat naturel de travail. C'est en effet un contrat de subordination qui, par exemple, ne lui laisse pas le choix de refuser d'effectuer des heures supplémentaires sans prendre le risque d'un licenciement. On comprend dès lors que cette subordination du salarié par rapport à son employeur ait pu faire l'objet d'un encadrement légal par l'Etat qui vaut protection du salarié et dont les enfants ont été en France les premiers bénéficiaires au XIXe siècle.

Corrigé du TD n°6
La demande du consommateur

Soit un consommateur dans un univers de concurrence parfaite dont la relation de préférence sur les paniers de biens est représentée par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1, x_2) = x_1 x_2^{1/2}$$

On note p_1 et p_2 les prix concurrentiels respectifs du bien 1 et du bien 2 et B le budget du consommateur.

Question 1 : Quelles justifications peut-on donner de l'hypothèse de concurrence parfaite ?

Une première justification traditionnelle de la concurrence parfaite réside dans le grand nombre d'individus présents des deux côtés du marché, celui de l'offre et celui de la demande, de sorte que chacun se trouve privé de tout pouvoir de marché, de toute influence sur le prix du marché. En effet, dans la configuration du grand nombre, l'offre ou la demande de chaque agent a une taille trop infime au regard de l'offre ou de la demande globale pour que leur variation exerce une influence sur le rapport entre l'offre et la demande. En l'absence de pouvoir de marché exercé par les agents, c'est donc la loi anonyme du marché qui règle le prix des biens.

Très souvent, la loi du marché est ainsi présentée comme une fin en soi, associée à une espèce de culte aveugle de la libre concurrence. Si la libre concurrence prend généralement la forme d'un slogan, notre détour par l'histoire de la microéconomie et, en particulier, par Turgot, montre que la libre concurrence correspond à l'organisation idéale des marches qui, en privant chacun d'un pouvoir de marché, autorise à retrouver la loi de l'échange naturel. Selon cette seconde justification, exprimée également par Léon Walras, la libre concurrence est un système qui permet à chacun d'obtenir sur les marchés ce qui naturellement lui revient, en « étant quitte des autres ».

Question 2 : Commentez les caractéristiques de l'environnement du consommateur.

Dans ce nouvel environnement, le consommateur n'adresse plus ses demandes de biens à lui-même mais aux marchés de concurrence parfaite sur lesquels 1) il dispose d'un budget B donné pour les acheter et 2) il les achète aux prix concurrentiels p_1 et p_2. Ces prix ne sont pas des prix monétaires car la monnaie est toujours absente. Leur expression absolue, par exemple $p_1 = 5$, veut dire que le consommateur, pour acquérir une unité de bien 1 sur le marché du bien 1, devra payer ou débourser cinq unités de son budget. Mais qu'est-ce que son budget si cela n'est pas une quantité de monnaie? À cette question, la théorie n'offre pas ici de réponse puisqu'elle considère le budget comme une donnée, en raison de son approche partielle des marchés (seuls les marchés des biens sont considérés). Autrement dit, le sens des prix absolus n'est pas défini, ce qui n'est pas important puisque, comme on le verra, seuls les prix relatifs comptent.

Les conséquences de ces nouvelles caractéristiques sur le comportement du consommateur sont : en tant que prix concurrentiels, les prix s'imposent au consommateur comme des données. Il ne peut donc les discuter sur les marchés. Toutefois, par rapport à Robinson, l'objectivité de son environnement a changé. Il ne s'agit plus d'une objectivité naturelle liée à un environnement naturel mais d'une objectivité sociale que les prix concurrentiels traduisent. Comme le comportement du consommateur reste de nature paramétrique (il prend les prix comme des paramètres), on peut dire que les marchés concurrentiels sont l'équivalent pour lui d'une Nature.

Question 3 : Écrivez et commentez l'équation de la droite de budget puis vous la représenterez pour les valeurs numériques suivantes : $p_1 = 4$; $p_2 = 2$; B = 20.

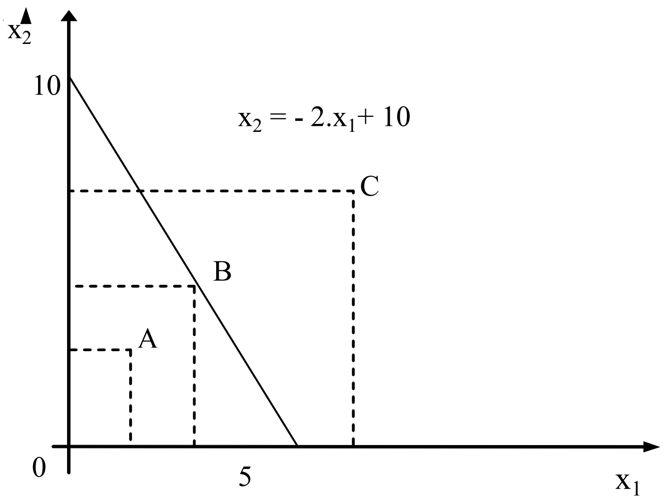
L'équation de sa contrainte budgétaire est :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = B \qquad (1)$$

De (1), il vient l'équation de la droite de budget :

$$x_2 = -\frac{p_1}{p_2} x_1 + \frac{B}{p_2}$$

Les paniers de biens auxquels le consommateur a accès dépendent du prix relatif des biens qui est une donnée du marché sur laquelle le consommateur n'a pas d'influence et de la valeur réelle de son budget, c'est-à-dire de son pouvoir d'achat. La représentation graphique de la droite de budget pour les valeurs données des paramètres en offre une illustration.



Le panier A n'appartient pas au choix du consommateur car il ne permet pas de saturer sa contrainte budgétaire (il est en dessous de la droite de budget). Il représente un gaspillage de ses ressources contraire à l'hypothèse de non satiété. Le panier C n'appartient pas au choix du consommateur, correspond à un montant de dépense supérieur au budget (il est au-dessus de la droite de budget). Le panier B, parce qu'il se situe sur la droite de budget, appartient aux choix possibles du consommateur.

La pente en valeur absolue de la droite de budget indique un taux d'échange réel ou relatif selon lequel une unité de bien 1 s'échange sur les marchés concurrentiels des biens contre deux unités de bien 2.

Question 4 : Écrivez le calcul du consommateur. Commentez son comportement et comparez-le à celui de Robinson.

Calcul de maximisation du consommateur :

$$\underset{x_1, x_2}{Max}\, U(x_1, x_2)$$
$$s.c. \quad B - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

L'objectif du consommateur est d'acheter sur les marchés les quantités des biens 1 et 2 qui maximisent son utilité. On remarque que la première ligne du calcul s'interprète en tenant compte du contexte de l'individu. Préférences et contexte ne sont donc pas séparables comme pourrait le faire croire une fausse présentation du consommateur, centrée sur lui-même. Ses achats de biens font intervenir le prix concurrentiel des biens, qu'il ne discute pas mais prend comme une donnée de son calcul, et son budget qui lui aussi est une donnée mais pour une autre raison résidant dans le caractère partiel de l'analyse laissant de côté les marchés des ressources. Les marchés lui imposent alors la règle d'équilibre budgétaire qui veut que la valeur de ses dépenses soit égale à la valeur de son budget.

Par rapport à Robinson, le consommateur poursuit le même objectif de maximisation de son utilité sauf qu'il ne s'adresse plus à lui-même pour le réaliser en faisant un échange naturel avec lui-même. Désormais il s'adresse aux marchés concurrentiels qui, à l'image de l'échange naturel, représentent aussi une Nature pour le consommateur où « tout se paie » pour reprendre l'expression de Turgot.

Question 5 : Construisez le Lagrangien et déduisez de la condition de 1er ordre, après l'avoir écrite, les demandes en biens 1 et 2 du consommateur (en ne donnant pas de valeur numérique aux paramètres de l'économie). Commentez ces demandes.

Le Lagrangien du calcul du consommateur est :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(B - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

Condition de 1er ordre :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (3) \end{cases}$$

De (1) et (2), par élimination de λ, on obtient la relation suivante :

$$x_2 = \frac{p_1}{2p_2} x_1 \quad (4)$$

De (3) et (4), on obtient la demande en bien 1 :

$x_1(p_1, B) = \frac{2}{3}\frac{B}{p_1}$ d'où, en utilisant (4), on déduit la demande de bien 2 :

$$x_2(p_2, B) = \frac{1}{3}\frac{B}{p_2}$$

Les demandes d'un bien sont des fonctions décroissantes du prix du bien et croissante du budget. De plus, ce sont des fonctions homogènes de degré 0 par rapport aux prix et au budget. Ainsi :

$x_2(k.p_1, k.p_2, k.B) = k^0 x_2(p_2, B)$ avec k >0.

Cette propriété d'homogénéité de degrés 0 des demandes du consommateur ne doit pas s'interpréter comme on le lit parfois comme l'absence d'illusion monétaire du consommateur. En effet, rappelons que le monde des marchés concurrentiels ignore la monnaie, tout comme celui de l'échange naturel. Aussi il n'y a aucune raison pour que dans un monde sans monnaie le consommateur soit ou ne soit pas victime de l'illusion monétaire. Ce n'est pas la réponse qui est ici fausse, c'est la question même qui ne se pose pas. Cette propriété, qui découle de la droite de budget, signifie économiquement que le consommateur ne tient compte pour fixer sa demande de biens que des grandeurs réelles de l'économie (prix relatif et pouvoir d'achat du budget) et non pas des grandeurs absolues.

Question 6 : Montrez que la condition de premier ordre est ici une condition suffisante pour avoir un maximum.

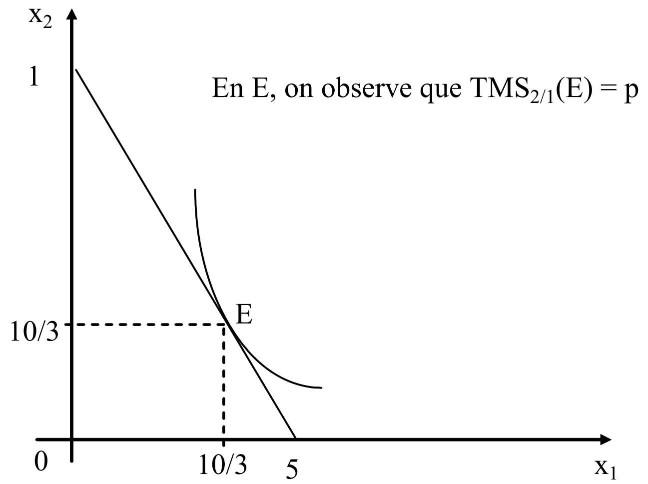
Pour montrer que la condition de premier ordre est ici suffisante, on montre qu'une condition équivalente à la condition de second ordre est réalisée. Cette condition équivalente est la convexité des courbes de préférence du consommateur.

De $U(x_1, x_2) = x_1 x_2^{1/2}$, on obtient l'équation de la courbe d'indifférence g(x_1) :

$$x_2 = g(x_1) = \left[\frac{\overline{U}}{x_1}\right]^2$$

On montre alors que $g(x_1)$ est convexe car sa dérivée seconde est toujours positive pour des quantités positives de biens : $g''(x_1) = \frac{6.\overline{U}^2}{x_1^{-4}} > 0$.

Question 7 : Représentez le choix optimal du consommateur pour $p_1 = 4$; $p_2 = 2$ et B = 20. Montrez en vous aidant d'un raisonnement graphique quelle propriété caractérise ce choix.



En effet : $\text{TMS(E)} = \dfrac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{10}{3}}}{\dfrac{\frac{10}{3}}{2\sqrt{\frac{10}{3}}}} = 2$

et $p = \dfrac{p_1}{p_2} = 2$

Ce panier est optimal puisqu'il optimise l'utilité du consommateur. C'est aussi un panier d'équilibre individuel, car en E le consommateur ne modifie plus ses demandes (en E, « plus rien ne bouge » au niveau des décisions du consommateur).

Question 8 : Suite à des modifications sur les marchés, les prix des biens 1 et 2 ainsi que son budget B sont multipliés par deux. Calculez le nouveau panier optimal et expliquez, en le comparant au précédent, sa composition.

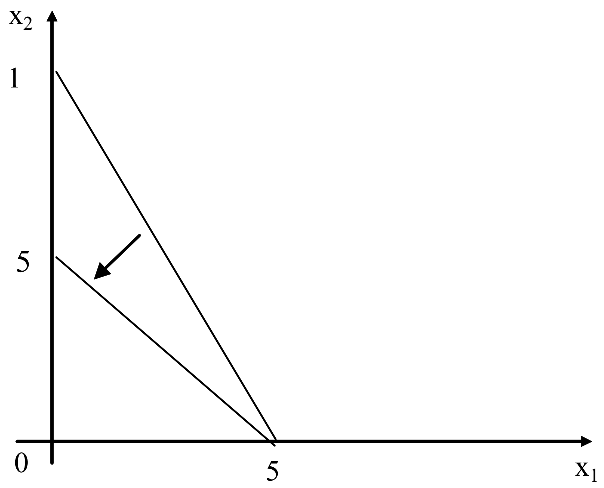
On sait que les demandes sont des fonctions homogènes de degré 0 par rapport aux prix et au budget. Aussi, une augmentation équiproportionnelle de ceux-ci laisse inchangé le choix optimal du consommateur. On le vérifie pour la demande de bien 1 :

$$x_1(2p_1, 2B) = \frac{2}{3}\frac{2B}{2p_1} = \frac{2}{3}\frac{B}{p_1}$$

Ne pas tomber dans le piège d'une interprétation qui voit ici un consommateur qui ne serait pas victime de l'illusion monétaire : étant dans un monde sans monnaie, cette question de l'illusion monétaire ne s'y pose pas, et donc lui apporter une réponse n'a aucun sens.

Question 9 : Maintenant, au lieu d'une variation équiproportionnelle des prix et du budget, on envisage le doublement du seul prix du bien 2. Qu'est-ce qui s'en trouve modifié dans le programme du consommateur ? Représentez cette modification.

Ce qui se trouve modifié, c'est sa contrainte budgétaire à deux niveaux ; celui du prix relatif des biens ; ainsi le prix relatif du bien 1 diminue et devient désormais le même que celui du bien 2 (graphiquement, cela se traduit par une modification de la pente de la droite de budget) ; celui du pouvoir d'achat du consommateur, qui diminue suite à la hausse du prix du bien 2 (ceci se traduit graphiquement par le déplacement vers le bas de la droite de budget).



Question 10 : Calculez le nouveau panier optimal de biens et comparez-le à celui de la question 7. Qu'en concluez-vous ?

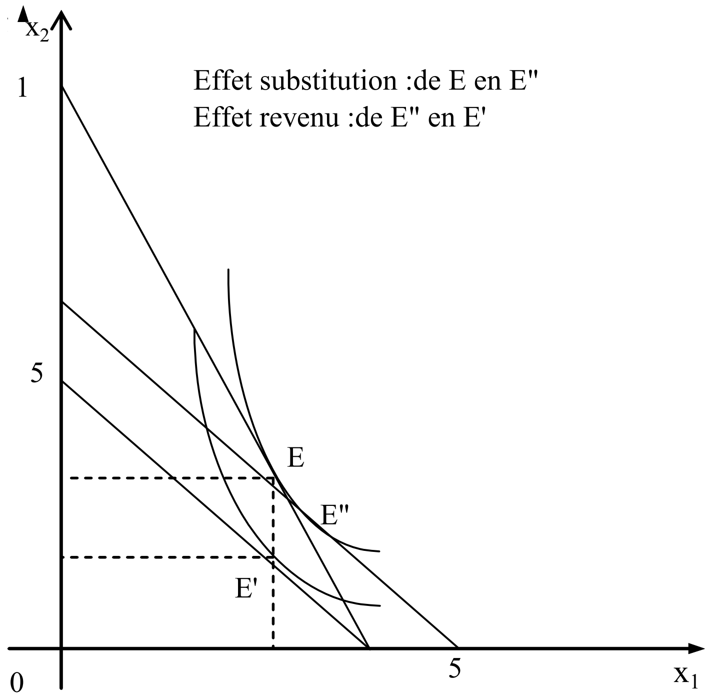
En repartant de l'expression générale des demandes du consommateur on trouve, à la suite du doublement de p_2 :

$x_1(p_1, B) = \frac{2}{3}\frac{B}{p_1}$ qui reste inchangé et

$$x_2(p_2, B) = \frac{1}{3}\frac{B}{p_2} = \frac{5}{3}$$

Suite à l'augmentation du prix du bien 2, la demande en bien 2 diminue alors que la demande en bien 1 reste constante. Contrairement à ce que pourrait laisser croire une lecture rapide des nouvelles demandes optimales, la demande en bien 1 est sensible à la variation du prix du bien 2. Celle-ci cependant exerce sur cette demande un effet substitution positif qui compense exactement l'effet revenu négatif. Au total, donc la variation du prix du bien 2 a deux effets sur la demande optimale de bien 1, dont la compensation fait ici que cette dernière reste inchangée.

Question 11 : Représentez graphiquement les effets substitution et revenu sur la demande en biens 1 et 2 de la hausse du prix du bien 2.



L'équilibre fictif E" représente les demandes optimales que le consommateur aurait consommé si, à la suite de l'augmentation du prix du bien 1, il avait reçu un supplément de budget compensant sa baisse de pouvoir d'achat. Graphiquement, c'est le point de tangence entre sa courbe d'indifférence passant par son panier optimal initial E et une troisième droite de budget qui est parallèle à la nouvelle droite de budget incorporant la variation du prix du bien 2. Le passage de E à E" sur la courbe d'indifférence associé au panier optimal initial représente alors l'effet substitution sur la demande de biens, puisque l'effet revenu a été neutralisé par le supplément fictif de revenu : le consommateur a substitué du bien 1 (dont la demande a augmenté) au bien 2 (dont la demande a diminué). Le passage de E" à E', le nouveau panier optimal, représente alors l'effet revenu : il se traduit par une baisse de la demande de bien 1 et de la demande de bien 2. Comme l'effet revenu négatif de l'augmentation du prix du bien 2 sur la demande de bien 1 compense strictement son effet substitution positif sur cette même demande, la demande optimale de bien 1 au total reste inchangée.

Corrigé du TD n°7

L'offre de travail du consommateur

Nous reprenons pour le consommateur les mêmes préférences que celles exprimées par Robinson dans le TD n° 5, soit $U(X,L) = X(T-L)$. Dans son environnement de concurrence parfaite, le prix du travail (salaire) est noté w et celui du bien p. Enfin, le consommateur a un budget non salarial donné B.

Question 1 : Écrivez la contrainte budgétaire du consommateur. Vous la comparerez avec la contrainte propre au calcul de Robinson dans le TD n°5.

La contrainte budgétaire du consommateur salarié est la suivante :

$$pX = wL + B$$

Rappelons la double contrainte de Robinson producteur :

$$Y = f(L)$$
$$X = Y$$

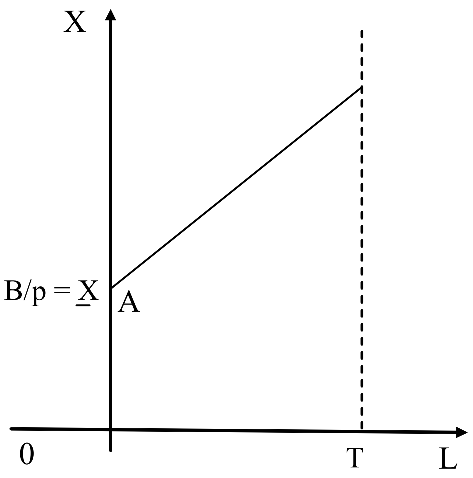
L'accès au bien de consommation passe dans les deux cas par l'offre de travail. Dans le cas de Robinson, c'est une offre faite « au grand magasin de la nature » selon l'expression de Turgot. Elle dépend de la productivité de son travail ou de son coût à produire le bien. D'autre part, l'accès au bien se fait sous la règle de l'égalité entre l'offre et la demande. Désormais, pour le consommateur salarié, son offre de travail est adressée au marché où le travail a un prix concurrentiel. L'égalité à laquelle il fait face est celle entre sa dépense et ses recettes aux prix des marchés. Enfin, il dispose d'un revenu non salarial qui trouve une seule légitimation du point de vue de l'économie de Robinson : le retour sur investissement.

Question 2 : Vous déduirez de la contrainte budgétaire du consommateur sa droite de budget. Vous la représenterez graphiquement et vous la commenterez.

De l'expression de sa contrainte budgétaire, on déduit l'équation de la droite de budget du consommateur salarié :

$$X = \frac{w}{p}L + \frac{B}{p}$$

Sa représentation graphique est la suivante :



La droite de budget représente l'ensemble des possibilités de consommation auxquelles le consommateur a accès grâce à l'offre de son travail. Elles sont limitées par son capital temps T, par le pouvoir d'achat de son revenu non salarial qui lui assure une consommation minimale égale à $\underline{X}$. Enfin, elles dépendent du pouvoir d'achat de son travail, c'est-à-dire du salaire réel : w/p, qui définit la pente de sa droite de budget.

Question 3 : Écrivez le calcul auquel se livre le consommateur pour déterminer sa demande de consommation et son offre de travail sur les marchés. Commentez-le.

Le calcul du consommateur salarié est le suivant :

$$\underset{X,L}{Max}\, U(X,L)$$
$$s.c. \quad wL + B - pX = 0$$

Ce calcul reprend le même objectif que celui de Robinson sauf qu'il est désormais poursuivi dans un environnement concurrentiel, et non plus dans celui de l'échange naturel. Cette différence se traduit au niveau de la contrainte qui introduit les prix de marché du travail et du bien de consommation. L'égalité qu'elle représente n'est plus celle du marché comme dans le cas de Robinson qui était un marché à lui tout seul.

Question 4 : Définissez et calculez le salaire de réservation du consommateur. Commentez-le.

Le salaire de réservation définit la rémunération réelle (c'est-à-dire la quantité de consommation) que le consommateur exige en contrepartie de sa première heure travaillée. Ce salaire de réservation correspond donc à la valeur du $TMS_{X/L}$ calculée au point A du graphique ci-dessus, de coordonnées $A = (X = B/p, L = 0)$.

Calculons le $TMS_{X/L}$ pour un panier quelconque :

$$TMS_{X/L} = \frac{dX}{dL} = -\frac{U_L'}{U_X'} = -\frac{-X}{T-L} = \frac{X}{T-L}$$

Le salaire de réservation du consommateur est donc égal à :

$$TMS_{X/L}(A) = \frac{\frac{B}{p}}{T} = \frac{B}{pT}$$

Il est donc croissant par rapport au pouvoir d'achat du revenu non salarial : plus le consommateur dispose d'un revenu « extérieur » réel élevé, plus il sera exigeant pour accepter d'entrer sur le marche du travail. Que l'on pense à la figure classique du rentier. Mais notre consommateur salarié en descendant de Robinson n'a aucune légitimité à être un rentier. Donc, il ne faut pas interpréter son revenu non salarial comme une rente pas plus d'ailleurs que comme un revenu d'assistance.

Question 5 : Déterminez l'offre optimale de travail et la demande optimale de consommation de ce consommateur. Commentez-les.

Le Lagrangien du calcul de maximisation est :

$$L(X,L,\lambda) = U(X,L) + \lambda(wL + B - pX)$$

La condition de premier ordre s'écrit :

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial X} = U_X'(X,L) - \lambda p = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial L}{\partial L} = U_L'(X,L) - \lambda w = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = wL + B - pX = 0$$

Des équations (1) et (2), par élimination de λ, on obtient la relation (4) suivante :

$$(4) \quad X = \frac{w}{p}(T-L)$$

De (3) et (4), on détermine l'offre de travail :

$$L^* = \frac{T}{2} - \frac{B}{2w}$$

D'où l'on déduit avec la relation (4) la demande de bien :

$$X^* = \frac{wT+B}{2p}$$

La demande de travail est une fonction décroissante du revenu non salarial et une fonction croissante du salaire. L'offre de bien est pour sa part une fonction croissante du salaire réel et du pouvoir d'achat du revenu non salarial, et une fonction décroissante du prix du bien de consommation.

Question 6 : Montrez la propriété que vérifie l'offre optimale de travail et commentez-la.

Des équations (1) et (2) de la condition de premier ordre, on déduit que l'offre de travail du consommateur salarié vérifie l'égalité suivante :

$$-\frac{U_L'}{U_X'}=\frac{w}{p}$$

L'offre de travail du consommateur salarié est donc telle que la valeur relative subjective de l'heure supplémentaire est égale à sa valeur réelle de marché. Si tel n'était pas le cas, le consommateur aurait en effet soit intérêt à faire une heure de travail en moins soit à faire une heure de travail en plus selon le sens de l'inégalité.

Question 7 : Pour quelle valeur de B et quelle valeur du salaire réel w/p la durée de travail et la consommation du consommateur sont les mêmes que celles calculées pour Robinson dans le TD n° 5 (question 4) ? Commentez ces résultats.

On rappelle les résultats obtenus par Robinson à la question 4 du TD n°5 :

$$\mathrm{L}^* = \frac{1}{2}\mathrm{T} \quad \text{et} \quad X^* = T$$

Aussi, le consommateur salarié aura une offre de travail identique à celle de Robinson lorsque :

$$L^* = \frac{T}{2} - \frac{B}{2w} = \frac{T}{2} \Rightarrow B = 0$$

Donc pour un revenu non salarial nul.

Il en résulte que sa consommation sera la même que celle de Robinson lorsque :

$$X^* = \frac{wT + B}{2p} = T \Rightarrow \frac{w}{p} = 2$$

Le consommateur salarié sera le clone de Robinson lorsque le salaire réel du marché sera égal à la productivité marginale de Robinson. À cette double condition, que le travail soit la seule ressource et que le salaire réel de marché soit égal à la productivité marginale, alors le consommateur salarié obtient sur les marchés ce qu'il aurait naturellement obtenu s'il avait été en situation d'échange naturel.

Question 8 : En supposant que les préférences de ce consommateur subissent un choc qui les modifie de sorte que la nouvelle fonction d'utilité les représentant est $U(X,L) = X^2(T-L)$, quel est alors le nouveau salaire de réservation du consommateur ? Comparez-le avec celui antérieur à ce choc sur les préférences.

Avec cette nouvelle fonction d'utilité, le $TMS_{X/L}$ devient égal à :

$$TMS_{X/L} = \frac{dX}{dL} = -\frac{U_L'}{U_X'} = -\frac{-X^2}{2X(T-L)} = \frac{X}{2(T-L)}$$

Il en résulte le nouveau salaire de réservation suivant :

$$TMS_{X/L}(A) = \frac{B}{2pT}$$

Le salaire de réservation du consommateur salarié a été divisé par deux. Ainsi, une plus grande préférence pour la consommation incite plus facilement ce dernier à entrer sur le marché du travail.

Question 9 : Quelles autres modifications seraient susceptibles d'augmenter l'incitation de ce consommateur à entrer sur le marché du travail ? Quels enseignements en tirez-vous pour la politique de l'emploi ?

Une baisse de la désutilité du travail (ou une baisse de la préférence pour le loisir) aurait le même effet d'incitation à l'entrée sur le marché du travail. Toutefois la politique de l'emploi ne joue pas sur la psychologie des personnes. Elle joue sur les grandeurs de marché qui sont ici le pouvoir d'achat du revenu non salarial et le salaire réel. L'incitation à l'entrée sur le marché du travail passe par la baisse ou la suppression de revenu non salarial. On peut penser aux préretraites qui ont contribué à retirer du marché du travail des salariés âgés de 55 ans à 60 ans. Ou encore à l'allocation parentale d'éducation qui a aussi contribué à retirer du marché du travail des mères de jeunes enfants, souvent peu diplômées et en situation d'emploi précaire. Elle passe aussi par l'augmentation du salaire réel sous la forme par exemple de la prime de l'emploi.

Mais si la politique de l'emploi ne vise pas la psychologie des personnes, celle-ci dépend néanmoins du bain culturel. Ainsi, le mythe de Robinson est censé diffuser un modèle de vie fondé sur la valeur de l'autonomie personnelle : par son propre travail, l'individu accède aux consommations qui satisfont ses propres désirs. En arrière plan de la politique de l'emploi joue un élément culturel qui fabrique la société de marché et qui conditionne les effets de la politique de l'emploi.

Corrigé du TD n°8
La demande de facteurs de la firme

Dans un environnement concurrentiel, on étudie le comportement d'une firme. On note z_1 la quantité de facteur travail et z_2 celle du facteur capital avec r le prix du facteur capital et w le salaire unitaire. La firme produit un seul output dont on note y les quantités et p le prix selon une technologie représentée par la fonction de production suivante :

$$y = f(z_1, z_2) = z_1^{1/2} z_2^{1/2}$$

Question 1 : Commentez les nouvelles caractéristiques du comportement productif de la firme, comparez-les avec celles de Robinson et discutez leur justification.

Désormais, la réalisation de la production requiert pour la firme de s'adresser aux marchés concurrentiels des facteurs sur lesquels elle achètera les quantités de facteur capital et de facteur travail à leur prix concurrentiel, r et w. Ces prix ne sont pas des prix monétaires et leur sens absolu n'est pas défini. On peut d'ailleurs légitimement se demander ce que la firme donne en échange de la quantité de facteurs qu'elle achète. Ce trou noir de la théorie est lié à l'approche partielle limitée aux seuls marchés des facteurs, mais aussi à la nature largement fictive de la firme néoclassique. De plus, en raison de l'hypothèse de concurrence parfaite, la firme considère les prix des facteurs comme des données qu'elle n'influence donc pas. On retrouve comme dans le cas de Robinson un comportement de nature paramétrique, justifié non plus par un environnement naturel mais par un environnement concurrentiel. On n'aura également noté qu'à côté du travail a été introduit le facteur capital (ce dernier aurait pu être considéré dans l'économie de Robinson, et ce n'est pas sur ce point que se fait la différence entre les deux économies).

La justification donnée à la concurrence parfaite est également le grand nombre de firmes présentes sur le marché de sorte qu'aucune ne peut, par la variation de sa demande de facteurs, faire varier les prix des facteurs. Il est assez évident que cette justification ne repose pas sur une base empirique, mais qu'elle est au service de l'idéal que représente la concurrence parfaite en tant qu'elle permet un fonctionnement des marchés qui laisse les prix gouvernés par les mêmes lois que celles de l'économie de Robinson, avec alors pour résultat le fait que chacun y obtient ce qui lui revient naturellement. Par contre, autant le grand nombre du côté des consommateurs peut apparaître comme un « idéal réaliste », autant du côté des firmes cet idéal s'éloigne de la réalité des marchés qui sont plutôt de nature oligopolistique avec un petit nombre de firmes. Certains marchés des facteurs sont d'ailleurs des monopsones : monopole du côté de la demande (de travail) avec une offre concurrentielle.

Question 2 : Déterminez la nature des productivités marginales des facteurs et celle des rendements d'échelle. Commentez.

$$Pm(z_1) = \frac{1}{2} z_1^{-1/2} z_2^{1/2} \text{ avec donc } Pm'(z_1) = -\frac{1}{4} z_1^{-3/2} z_2^{1/2} < 0$$

La productivité marginale du travail est donc décroissante : plus la firme utilise une grande quantité de travail, plus le supplément de production obtenu avec une unité de facteur travail en plus est faible.

Idem pour le capital.

Pour calculer la nature des rendements d'échelle, il faut multiplier les facteurs capital et travail par un même facteur multiplicatif $\lambda > 0$:

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^{1/2+1/2} z_1^{1/2} z_2^{1/2} = \lambda f(z_1, z_2)$$

Les rendements d'échelle sont donc constants : lorsque les facteurs de production sont multipliés par λ, la production est elle-même multipliée par λ. On remarque ici que la nature des rendements d'échelle ne se confond plus avec celle de la productivité marginale des facteurs, qui est décroissante pour le travail et pour le capital, comme c'était le cas avec les fonctions de production à un seul facteur.

Question 3 : Écrivez le calcul de minimisation du coût de production de la firme pour une quantité d'output donnée $\bar{y}$ et commentez le comportement de la firme.

Calcul de la firme :

$$\underset{(z_1, z_2)}{Min}\, CT = wz_1 + rz_2$$
$$s.c. \bar{y} - f(z_1, z_2) = 0$$

La firme néoclassique recherche les quantités de facteur qui lui permettront de produire avec le coût de production le plus faible possible la quantité donnée d'output compte tenu des techniques de production sur lesquelles elle n'intervient pas ; les techniques sont une variable exogène de la firme, tout comme le prix des facteurs qu'elle ne peut influencer dans son environnement concurrentiel. On remarque que cette recherche des quantités optimales de facteurs est possible en raison de techniques à facteurs substituables permettant de substituer un facteur à un autre.

La contrainte ici ne doit pas s'interpréter comme une contrainte de débouchés qui est une des formes que prend la concurrence imparfaite.

Question 4 : Déterminez les demandes optimales de facteurs à partir de la condition de premier ordre. Justifiez qu'il s'agit bien de demandes optimales de facteurs.

On construit d'abord le Lagrangien du problème :

$$L(z_1, z_2, \lambda) = wz_1 + rz_2 + \lambda(\bar{y} - f(z_1, z_2))$$

La condition de premier ordre s'écrit alors :

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial z_1} = w - \lambda f_1'(z_1, z_2) = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial z_2} = r - \lambda f_2'(z_1, z_2) = 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{y} - f(z_1, z_2) = 0$

En résolvant ce système d'équations (en commençant par éliminer λ des deux premières) on obtient les demandes optimales de facteurs suivantes :

$$z_1^* = \left(\frac{w}{r}\right)^{-1/2} \bar{y} \qquad \text{et} \qquad z_2^* = \left(\frac{r}{w}\right)^{-1/2} \bar{y}$$

La demande de travail est une fonction décroissante du prix relatif du travail et la demande de capital est une fonction décroissant du prix relatif du capital.

Il s'agit bien de demandes optimales de facteurs, c'est-à-dire de quantités de facteurs qui non seulement correspondent à un extremum du coût total mais aussi à un minimum, dans la mesure où une condition équivalente à la condition de second ordre est vérifiée ; en effet, les isoquantes tournent bien leur convexité vers l'origine. Montrons-le.

De $\bar{y} = z_1^{1/2} z_2^{1/2}$,

il vient : $z_2 = \dfrac{\bar{y}^2}{z_1} = g(z_1)$, l'équation de l'isoquante associée à $\bar{y}$

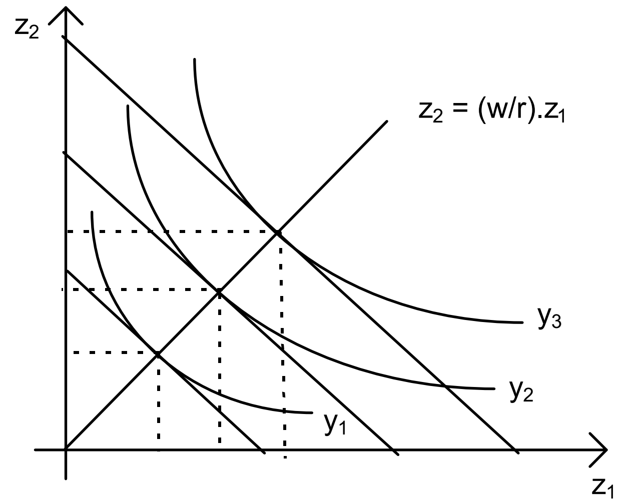
avec $g''(z_1) = 2\dfrac{\bar{y}^2}{z_1^3} > 0$ CQFD

<u>Question 5</u> : Vous déduirez de la question précédente, l'équation du sentier d'expansion que vous définirez. Vous représentez ce dernier pour w/r = 1 et le commenterez.

L'équation du sentier d'expansion s'obtient en éliminant λ des équations (1) et (2) de la condition de premier ordre. Elle est alors la suivante :

$$z_2 = \frac{w}{r} z_1$$

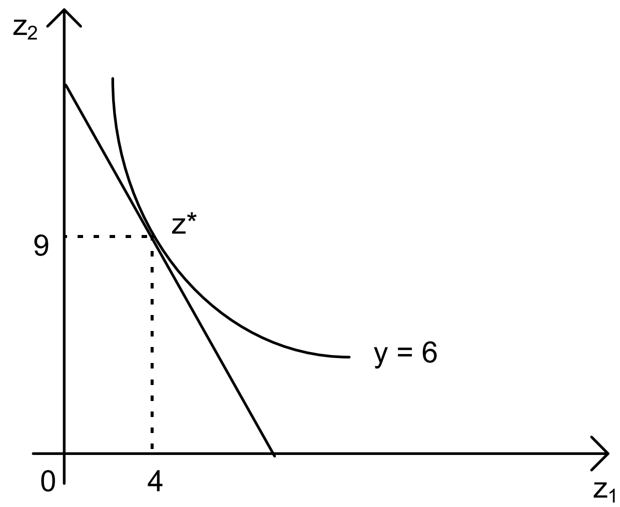
On la représente pour w/r = 1 de la manière suivante :



Cette équation donne l'ensemble des combinaisons optimales de facteurs pour les différentes quantités d'output. Ce sentier représente ainsi les quantités de facteurs que la firme néoclassique utilisera au fur et à mesure de sa croissance.

Question 6 : Représentez graphiquement la solution optimale pour w = 9, r = 4 et $\bar{y} = 6$. Commentez la propriété caractérisant la solution optimale.

Représentation graphique de la solution :



La propriété qui caractérise l'équilibre est l'égalité entre le prix relatif des facteurs (pente en valeur absolue de la droite d'isocoût) et le taux marginal de substitution technique du facteur 2 au facteur 1 (pente en valeur absolue de l'isoquante au point z^*). Soit l'égalité suivante :

$$TMST_{2/1}(z^*) = \frac{w}{p}$$

Elle se déduit d'ailleurs analytiquement des deux premières équations de la condition de premier ordre (voir ci-dessus), desquelles il vient :

$$\frac{f_1'(z_1,z_2)}{f_2'(z_1,z_2)}=\frac{w}{p}$$

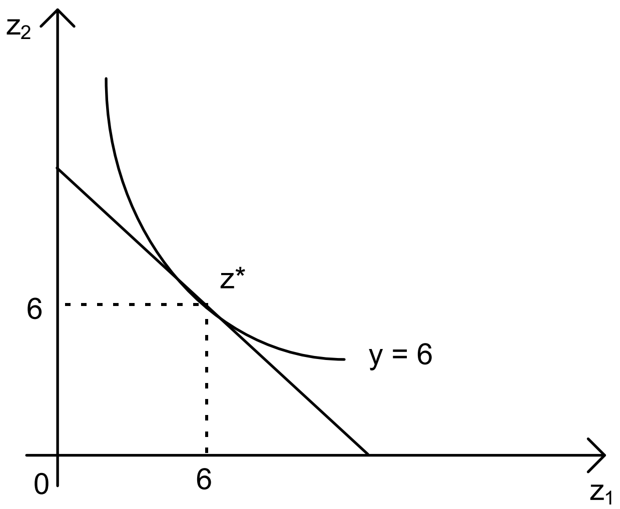
Cette égalité rappelle l'égalité qui caractérisait l'équilibre de Robinson où le rapport des productivités marginales était égal au TMS entre les biens de Robinson. On notera par rapport à la propriété caractérisant l'équilibre de Robinson que la propriété caractérisant l'équilibre de la firme néoclassique ne fait plus intervenir que des taux d'échange objectifs, déterminés soit par les techniques soit par les marchés concurrentiels. Ceci traduit bien la nature particulière de la firme néoclassique qui n'étant pas un agent humain, est dépourvue de toute dimension subjective.

Question 7 : À la suite d'un choc exogène, le salaire unitaire w devient égal à 4. Calculez et représentez les nouvelles demandes optimales de facteurs. Commentez les changements intervenus. Vous vous appuierez sur ce modèle et ses résultats pour interpréter la politique de baisse des charges sur les bas salaires.

Les nouvelles demandes de facteurs sont :

$$z_1^* = \left(\frac{4}{4}\right)^{-1/2} 6 = 6 \text{ pour le travail}$$

$$z_2^* = \left(\frac{4}{4}\right)^{-1/2} 6 = 6 \text{ pour le capital}$$



Suite au choc exogène, qui revient à un abaissement relatif du prix du travail, la demande optimale de travail de la firme augmente alors que sa demande de capital diminue, sous l'effet substitution de cette variation du prix relatif. On remarque également que lorsque le prix relatif du capital est égal à celui du capital, les demandes de facteur sont les mêmes en raison de la « neutralité » des techniques, puisque les élasticités de l'output par rapport au travail et par rapport au capital sont les mêmes.

Pour une firme, la baisse des charges sur les bas salaires revient à un choc exogène qui abaisse le prix relatif du travail peu qualifié par rapport au capital et au travail qualifié. Selon ce modèle, on devrait donc s'attendre à ce que cette politique entraîne une augmentation de la demande de travail peu qualifié. De manière empirique, on observe en effet que la politique de baisse des charges sur les bas salaires a entraîné depuis le milieu des années 1990 une augmentation de l'emploi non qualifié. Cette interprétation doit toutefois être faite avec précaution, car les firmes réelles ont de nombreuses différences par rapport à la firme néoclassique dont la nature est idéaliste.

Question 8 : Vous déduirez la fonction de coût total de la firme, puis vous déterminerez la nature du coût moyen et du coût marginal. Vous les commenterez.

De $C(w, r, \bar{y}) = w\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\bar{y} + r\left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}\bar{y}$

On déduit en remplaçant $\bar{y}$ par y, la fonction de coût total C(y) :

$$C(y) = 2(w.r)^{1/2}\,y$$

On a alors :

$$CM(y) = \frac{C(y)}{y} = 2(w.r)^{1/2} = Cm(y) = C'(y) = 2(w.r)^{1/2}$$

avec CM' = Cm' = 0

Que le coût moyen soit constant et donc égal au coût marginal est une conséquence des rendements d'échelle constants puisque dans ce cas toute augmentation équiproportionnelle des facteurs a toujours le même impact sur la production, quelle que soit la quantité des facteurs utilisée. Aussi, le coût de chaque unité de production supplémentaire est-il constant.

Corrigé du TD n°9
L'offre de la firme

On reprend la firme néoclassique du TD n° 8.

Question 1 : Écrivez le calcul de maximisation du profit de la firme en utilisant la méthode indirecte. Commentez le comportement de la firme.

La méthode indirecte de maximisation du profit scinde en deux étapes le calcul. Dans une première étape, la firme établit ses demandes optimales de facteurs à quantité d'output donné, d'où elle déduit sa fonction de coût $C(y)$ (voir le corrigé du TD n°8 précédent). Dans une seconde étape, elle calcule la quantité d'output qui maximise son profit en se référant à sa fonction de coût. Elle résout donc le calcul suivant :

$$\underset{y}{Max}\, \Pi(y) = py - C(y) \quad avec\ C(y) = 2\sqrt{wr}\ y$$

La firme recherche la quantité de bien qu'elle doit offrir sur le marché afin de réaliser un profit maximum, en considérant déjà résolu la question de sa demande de facteur via la fonction de coût C(y) et en prenant le prix de marché comme une donnée. Implicitement, la firme fait l'hypothèse qu'elle pourra écouler n'importe quelle quantité au prix donné du marché. Une telle modélisation encore une fois correspond à l'idéal de la concurrence parfaite et n'a pas de vocation réaliste. Évidemment, cette écriture laisse dans l'ombre la question de la destination du profit puisque la firme n'étant pas un individu n'est pas le bénéficiaire du profit. Lorsque la théorie de la firme néoclassique est intégrée dans une théorie générale des marchés, on admet que le profit revient aux consommateurs actionnaires en tant que ces derniers sont dotés de droits de propriété. Mais on admet aussi qu'à long terme, le profit de la firme est nul. Il n'est pas simple de faire correspondre idéal et réalité.

Question 2 : À quelle propriété conduit la solution de premier ordre ? À quelle solution ici conduit la résolution de la condition de premier ordre de ce programme ? Donnez l'explication de ce résultat.

La condition de premier ordre a la forme simple suivante :

$$\Pi'(\mathrm{y}) = 0$$

d'où :

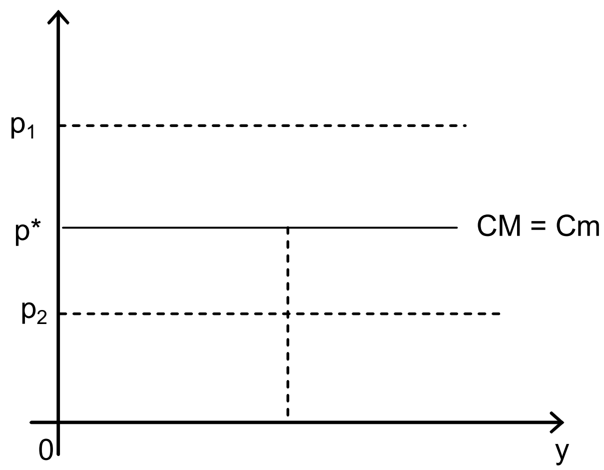
$$p^* = Cm(y^*)$$

Cette propriété de la solution pour l'offre de la firme concurrentielle est appelée sa « règle d'or ». Selon cette dernière, la firme produit une quantité telle que le coût marginal de cette quantité est égal à son prix de marché. Comme pour la demande optimale de facteur, la propriété qui caractérise l'offre optimale de la firme ne fait apparaître aucune dimension subjective, mais seulement un rapport entre deux évaluations objectives des biens : l'une en termes de prix concurrentiel de marché, l'autre en termes de coût. Enfin, cette propriété ne doit pas être interprétée comme une théorie des prix puisqu'au niveau du calcul de la firme le prix de l'output est une donnée. Cette égalité explicite une propriété de l'offre de la firme.

L'égalité ci-dessus conduit dans ce cas précis à la solution suivante :

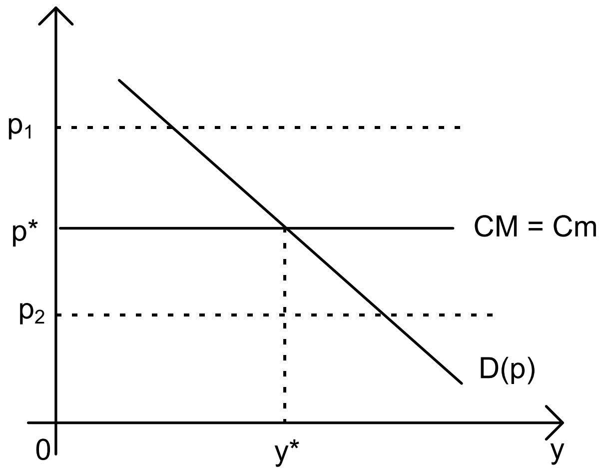
$$p^* = 2(w.r)^{1/2} = CM(y) = Cm(y)$$

La condition de premier ordre impose un prix égal au coût moyen qui est le seul cas de figure où une solution existe lorsque les rendements d'échelle sont constants. Ainsi que le montre le graphique ci-dessous, tout prix supérieur à p* implique une recette marginale positive et constante (p_1 - Cm) de sorte que le profit ne connaît pas de maximum et tend vers l'infini. De même, tout prix inférieur à p* entraîne une recette moyenne inférieure au coût moyen pour toute quantité positive d'output, de sorte que dans ce cas la seule possibilité est une production nulle. À l'inverse pour un prix égal à p* = Cm = CM, toute production donne lieu à un profit nul qui est intéressant pour l'entreprise en supposant que la fonction de coût intègre un taux de marge qui est donc réalisé pour un profit nul.



Question 3 : Comment est-il possible de déterminer la quantité produite par la firme dans cette situation. Représentez et commentez cette détermination.

Afin de permettre la détermination par la firme néoclassique de son niveau d'offre, il faut lui transmettre une information supplémentaire ; en plus du prix, il faut lui indiquer quelle est à ce prix la demande qu'elle pourra écouler. Il faut lui donner pour information la demande D(p) qui s'adresse à elle. Elle est alors en mesure de déterminer son offre dont le niveau est celui qui au prix donné sera égal à la demande, comme l'indique le graphique ci-dessous :



On introduit une modification exogène au niveau des techniques désormais représentées par la fonction suivante :

$$y = z_1^{1/2} z_2^{1/4}$$

Question 4 : Commentez ce changement exogène.

Ce changement exogène porte sur l'élasticité de l'output au capital qui diminue (l'output est moins sensible à une variation de capital) et entraîne une modification de la nature des rendements d'échelle qui sont désormais décroissants :

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^{3/4} f(z_1, z_2) < \lambda f(z_1, z_2)$$

Pour des quantités égales de capital et de travail, la technique utilisée par la firme n'est plus neutre, donnant désormais un avantage relatif au travail dans la production de l'output. Ceci se traduit par la valeur du $TMST_{2/1}(z_1, z_2)$ qui n'est plus unitaire pour des quantités égales de facteurs :

$$TMST_{2/1}(z_1, z_2) = -\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{f_1'(z_1, z_2)}{f_2'(z_1, z_2)} = 2\frac{z_2}{z_1}$$

Ainsi, techniquement, une unité de travail vaut deux unités de capital lorsque les quantités de facteurs sont égales.

Question 5 : Calculez les demandes optimales de facteur obtenues pour un niveau donné de production $\bar{y}$. Commentez-les.

On retrouve ici la première étape de la méthode indirecte de maximisation du profit qui consiste à calculer les demandes optimales de facteurs qui minimisent le coût de production pour un niveau donné de production. Soit le calcul suivant :

$$\underset{z_1, z_2}{Min}\, CT = wz_1 + rz_2$$
$$s.c. \quad \bar{y} = f(z_1, z_2) = z_1^{1/2} z_2^{1/4}$$

Le Lagrangien du problème est :

$$L = wz_1 + rz_2 + \lambda(\bar{y} - f(z_1, z_2))$$

De la condition de premier ordre :

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial z_1} = w - \lambda f_1'(z_1, z_2) = 0$$
$$(2) \quad \frac{\partial L}{\partial z_2} = r - \lambda f_2'(z_1, z_2) = 0$$
$$(3) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{y} - f(z_1, z_2) = 0$$

Par élimination de λ des équations (1) et (2), il vient l'équation (4) :

$$(4) \qquad z_2 = \frac{1}{2}\frac{w}{r} z_1$$

D'où en utilisant les équations (3) et (4), on obtient la demande de travail :

$$z_1{}^* = \left(\frac{w}{2r}\right)^{-3/5} \bar{y}^{4/5}$$

Puis la demande de capital avec la relation (4) :

$$z_2{}^* = \left(\frac{2r}{w}\right)^{-8/5} \bar{y}^{4/5}$$

La demande de travail est une fonction décroissante du prix relatif du travail et croissante du prix relatif du capital. Inversement, la demande de capital est une fonction décroissante du prix relatif du capital et croissante du prix relatif du travail.

Question 6 : Écrivez le programme de la firme en utilisant la méthode directe de maximisation de la production. Commentez le comportement de la firme.

Selon la méthode directe, le calcul s'effectue en une seule étape : la firme calcule en même temps les demandes de facteurs travail et capital et l'offre d'output, qui maximisent son profit. Son calcul s'écrit alors :

$$\underset{(z_1,z_2)}{Max}\, \Pi(z_1,z_2) = pf(z_1,z_2) - wz_1 - rz_2$$

Le calcul intègre à la fois le comportement de la firme sur le marché des facteurs où les prix des facteurs sont des données, son comportement sur le marché de l'output où le prix est aussi une donnée et, enfin, son comportement à l'intérieur de la firme qui revient à transformer techniquement les inputs en output.

Question 7 : Calculez les demandes de facteur puis l'offre de la firme. Commentez-les. Enfin, montrez les propriétés que vérifient les demandes de facteur.

On est ici en présence d'un problème de maximisation d'une fonction à plusieurs variables libre de contrainte. La condition de premier est constitué par le système d'équations annulant les dérivées partielles de la fonction objectif, soit :

$$(1) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z_1} = pf_1' - w = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z_2} = pf_2' - r = 0$$

Des équations (1) et (2), il vient :

$$z_2 = \frac{1}{2}\frac{w}{r} z_1$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$\frac{1}{2} p z_1^{-1/2} \left(\frac{1}{2}\frac{w}{r} z_1\right)^{1/4} - w = 0$$

D'où finalement on obtient les demandes optimales de facteurs :

$$z_1{}^* = \frac{p^4}{32\, r\, w^3} \quad \text{puis} \quad z_2{}^* = \frac{p^4}{64\, r^2\, w^2}$$

Enfin, on calcule l'offre de la firme en utilisant la fonction de production :

$$y^* = \left[\frac{p^4}{32\, r\, w^3}\right]^{1/2} \left[\frac{p^4}{64 r^2 w^2}\right]^{1/4} = \frac{p^3}{16\, r\, w^2}$$

Des équations (1) et (2) de la condition de premier ordre, on déduit la propriété que les demandes optimales de facteurs vérifient. En effet, de :

(1) $$\frac{\partial \Pi}{\partial z_1} = pf_1' - w = 0 \Rightarrow f_1' = \frac{w}{p}$$

(2) $$\frac{\partial \Pi}{\partial z_2} = pf_2' - r = 0 \Rightarrow f_2' = \frac{r}{p}$$

Ou, encore, par élimination de p :

$$\frac{f_1'}{w} = \frac{f_2'}{r}$$

Cette propriété des demandes de facteur n'a toujours aucune dimension subjective. De plus, elle rappelle fortement la propriété établie pour le panier optimal de consommation selon laquelle les utilités marginales des biens pondérées par leur prix sont égales entre elles. Cette propriété exprime pour les demandes optimales de facteurs l'équivalent de la seconde loi de Gossen pour les biens.

Question 8 : Comparez les demandes optimales de facteurs obtenues dans la question 7 avec celles obtenues dans la question 5. Qu'en déduisez-vous ?

La demande optimale de travail obtenue dans la question 7, selon donc la méthode directe de maximisation de profit, est une fonction décroissante du prix réel du travail comme du prix réel du capital. Par rapport à la demande optimale de travail obtenue dans la question 5, elle n'a donc plus la même relation au prix réel du capital. De même pour la demande de capital qui dans la question 7 devient une fonction décroissante du prix réel du travail alors que celle obtenue dans la question 5 était une fonction croissante du prix relatif du travail.

La différence vient du fait que les demandes optimales de facteurs dans la question 7 intègrent, en plus de l'effet substitution d'une variation du prix d'un facteur, l'effet profitabilité de cette variation. L'effet profitabilité fait alors plus que compenser l'effet substitution. Par exemple, la hausse du prix réel du travail n'entraîne plus, au total, une augmentation de la demande de capital mais sa diminution liée la baisse du niveau de production rentable suite à la hausse du prix du travail.

Corrigé du TD n°10

L'équilibre général concurrentiel

On considère deux individus 1 et 2 dont les positions initiales d'autarcie sur le libre marché sont les suivantes : $x^{1a} = (4,4)$ pour l'individu 1 et $x^{2a} = (3,6)$ pour l'individu 2. L'individu 1 a calculé sa position initiale d'autarcie à partir de ses caractéristiques subjectives et techniques données par : $U^1(x_1^1, x_2^1) = (x_1^1)^{1/2}(x_2^1)$ pour ses préférences sur les biens et par les équations $y_1^1 = f_1^1(t_1^1) = 2t_1^1$; $y_2^1 = f_2^1(t_2^1) = t_2^1$ et $t^1 = t_1^1 + t_2^1 = 6$ pour ses techniques. De son côté, l'individu 2 a calculé son panier optimal d'autarcie à partir de ses données subjectives et techniques données par : $U^2(x_1^2, x_2^2) = (x_1^1)(x_2^2)$ pour ses préférences sur les biens et par les équations $y_1^2 = f_1^2(t_1^2) = t_1^2$; $y_2^2 = f_2^2(t_2^2) = 2t_2^2$ et $t^2 = t_1^2 + t_2^2 = 6$ pour ses techniques.

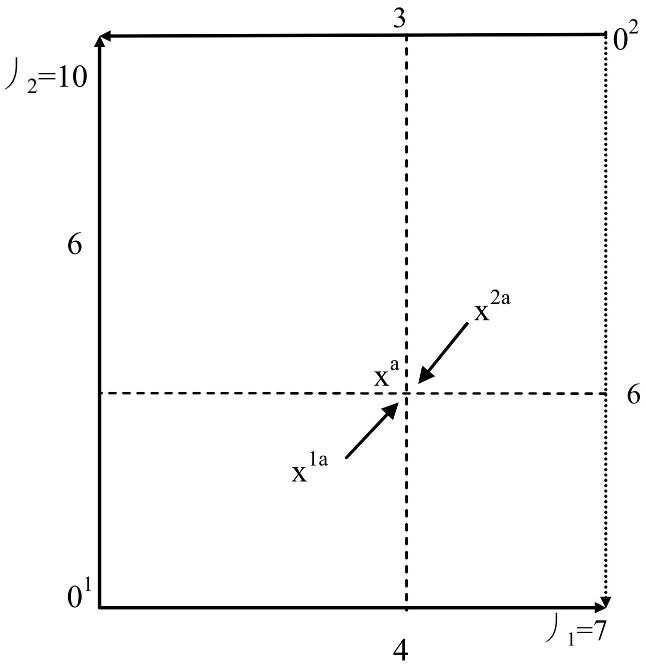
Question 1 : Construire la boîte d'Edgeworth étendue de cette économie d'échange à deux biens et deux individus.

Nous commencerons par représenter la boîte d'Edgeworth (simple) qui représente l'ensemble des allocations réalisables de l'économie constituée par les deux individus sur la base de leur dotation initiale : le panier de biens $x^{1a} = (4,4)$ pour l'individu 1 et le panier de biens $x^{2a} = (3,6)$ pour l'individu 2. Cette représentation se base alors sur les stocks en biens de l'économie qui définissent la longueur des côtés de la boîte d'Edgeworth (simple) avec :

$x_1^{1a} + x_1^{2a} = 4 + 3 = 7 = \omega_1$ le stock de l'économie en bien 1

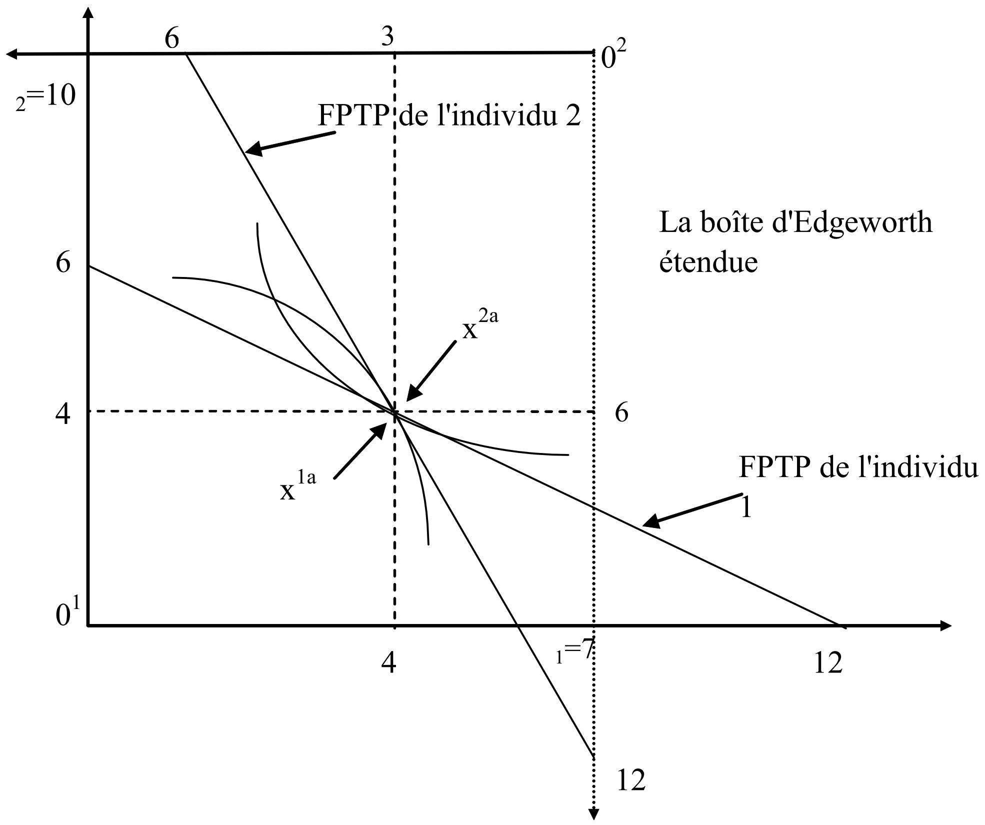
$x_2^{1a} + x_2^{2a} = 4 + 6 = 10 = \omega_2$ le stock de l'économie en bien 2.

Enfin, on remarque sur son graphique l'astuce de la boîte d'Edgeworth (simple) qui est de représenter par un seul point de son espace les situations de l'individu 1 et de l'individu 2, c'est-à-dire les quatre coordonnées d'une économie à deux individus et deux biens.



La boîte d'Edgeworth
(simple)

On passe ensuite à la représentation de la boîte d'Edgeworth étendue qui représente chaque position initiale des individus comme sa situation d'équilibre en autarcie, c'est-à-dire graphiquement comme un point de tangence entre sa frontière des possibilités techniques de production (FPTP), dont la représentation justement oblige à étendre les côtés de la boîte d'Edgeworth simple, et la courbe d'indifférence de l'individu.



Question 2 : Commentez le point de statu quo x^a de la rencontre entre ces deux individus.

Le point de statu que $x^a = (x^{1a}, x^{2a})$, dont les coordonnées pour l'individu 1 se lisent sur les axes normaux et pour l'individu 2 sur les axes inversés, désigne le point d'arrivée de la négociation bilatérale en cas d'échec de celle-ci. Lorsque la « dispute » entre les deux individus ne débouche sur aucun échange entre eux, alors chacun reste dans une position de statu quo par rapport à l'état initial de la négociation. Autrement dit, chacun reste dans la position qu'il avait atteinte en situation d'autarcie. Que le point de statu quo représente pour chacun son état d'autarcie assure la liberté de chacun dans l'échange qui n'est pas contraint à l'échange social pour vivre. L'interdépendance de l'échange social se noue sur l'indépendance de chacun.

Question 3 : À partir du point de statu quo x^a , situez les allocations réalisables correspondant à une situation de vol et/ou de don, celles correspondant à un échange et, parmi celles-ci, celles correspondant à un échange mutuellement avantageux.

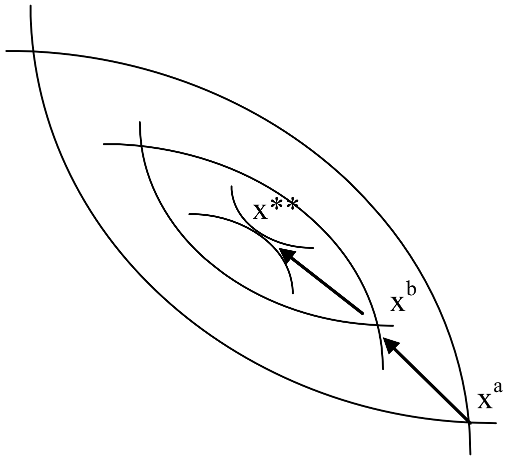
À partir du point de statu quo x^a, l'espace de la boîte d'Edgeworth, qui est ici un rectangle de côtés 7 et 10, se divise en quatre zones : les zones nord-est (NE), nord-ouest (NO), sud-est (SE) et sud-ouest (SO). Les deux zones NE et SO correspondent soit à des situations de vol soit à des situations de don. En effet, si après leur rencontre, les nouvelles allocations de l'économie se situent dans ces zones, alors l'un se trouvera avec plus des deux biens et l'autre avec moins des deux biens. Les flux physiques de cette rencontre peuvent recevoir deux interprétations. Ainsi, une nouvelle allocation de l'économie située dans la zone

NE pourra correspondre à un don de l'individu 2 en biens 1 et 2 au profit de l'individu 1. Ces mêmes flux peuvent correspondre no plus à un don mais à un vol : dans ce cas, l'individu 1 s'est emparé illicitement d'une partie des biens 1 et 2 initialement possédés par l'individu 2. Par contre, les zones NE et SO représentent une rencontre marchande avec échange entre les deux individus où chacun obtient une quantité d'un bien en plus contre une quantité de l'autre bien en moins. Mais, parmi les nouvelles allocations réalisables situées dans les zones NE et SO, seules celles comprises entre les deux courbes d'indifférence des individus passant par leur point de statu quo respectif représentent des échanges mutuellement avantageux. En effet, chacun à la suite de l'échange se situe dans ce cas au-dessus de sa courbe d'indifférence. Chacun a donc gagné en utilité à l'échange avec l'autre.

Question 4 : En considérant que ces deux individus se livrent à une négociation respectant la règle de l'échange volontaire, quelle caractéristique aura la nouvelle allocation de l'économie résultant de leur négociation. Représentez-la.

La règle de l'échange volontaire sélectionne parmi les échanges possibles les seuls échanges mutuellement avantageux. Aussi la nouvelle allocation de l'économie obtenue selon cette règle se situera à l'intérieur de l'espace compris entre les deux courbes d'indifférence que l'on appelle la lentille de l'économie. Mais cette règle de l'échange bilatéral, qui est une règle sociale prévalant dans une société du « doux commerce » selon l'expression de Montesquieu, n'est pas la seule règle qui suive les individus. Ces derniers suivent également la règle de leur intérêt privé. En ne représentant que la lentille de l'économie, grossie pour les besoins de la représentation graphique, admettons que la négociation entre nos deux individus les ait conduit à la nouvelle allocation de l'économie x^b représentée ci-dessous : dans cet échange bilatéral, l'individu 1 a offert du bien 1 et demandé du bien 2 alors que l'individu 2 a offert du bien 2 et demande du bien 1. Est-ce que cette nouvelle allocation de l'économie met un terme à leur négociation?

Non, pour la raison simple qu'il reste, après ce premier échange bilatéral, des échanges mutuellement avantageux, représentés par tous les points qui se situent entre les courbes d'indifférence passant par la nouvelle allocation de l'économie x^b. L'épuisement des échanges mutuellement avantageux va conduire la négociation entre les deux individus à un final qui sera caractérisé par une allocation d'équilibre pour laquelle les courbes d'indifférence des deux individus seront tangentes entre elles. L'allocation x^{**} représente sur le graphique l'un des points d'arrivée possible de la négociation bilatérale. En effet, depuis Edgeworth (1881), on sait que l'équilibre de l'échange bilatéral est indéterminé puisqu'il existe à l'intérieur de la lentille de l'économie une infinité d'allocations de l'économie pour lesquelles les courbes d'indifférences des individus sont tangentes entre elles. Ces allocations sont appelées le cœur de l'échange bilatéral.



La lentille de l'économie

Question 5 : On considère désormais que ces deux individus sont dans un environnement de concurrence parfaite avec les prix concurrentiels p_1 et p_2 pour les biens 1 et 2. Calculez les consommations optimales et les demandes nettes en bien de ces deux individus.

Chaque individu $i = 1,2$, pour déterminer ses consommations optimales, procède au calcul suivant :

$$\underset{x_1^i, x_2^i}{Max}\, U^i(x_1^i, x_2^i)$$
$$s.c. \quad p_1 x_1^{ia} + p_2 x_2^{ia} - p_1 x_1^i - p_2 x_2^i = 0$$

Le Lagrangien de ce problème est alors :

$$L^i(x_1^{ia}, x_2^{ia}, \lambda) = U^i(x_1^i, x_2^i) + \lambda(p_1 x_1^{ia} + p_2 x_2^{ia} - p_1 x_1^i - p_2 x_2^i)$$

De la condition de premier ordre :

(1) $$\frac{\partial L}{\partial x_1^i} = U_1^{i'}(x_1^i, x_2^i) - \lambda p_1 = 0$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial x_2^i} = U_2^{i'}(x_1^i, x_2^i) + \lambda p_2 = 0$$

(3) $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1^{ia} + p_2 x_2^{ia} - p_1 x_1^i + p_2 x_2^i = 0$$

par élimination de λ des deux premières équations, chaque individu aboutit aux résultats suivants concernant ses consommations optimales désirées (sachant que la convexité des préférences fait de la condition de premier ordre une condition suffisante) :

$$x_1^1* = \frac{4}{3}\frac{p_2}{p_1} + \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad x_2^1* = \frac{8}{3}\frac{p_1}{p_2} + \frac{8}{3} \text{ pour l'individu 1}$$

$$x_1^2* = 3\frac{p_2}{p_1} + \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2^2* = \frac{3}{2}\frac{p_1}{p_2} + 3 \text{ pour l'individu 2}$$

On remarque que la consommation optimale de chaque bien est pour chacun des deux individus une fonction croissante du prix relatif de l'autre bien et donc également une fonction décroissante de son prix relatif.

Les demandes nettes sont les offres ou demandes de biens que chaque individu doit faire sur les marchés concurrentiels pour réaliser ses consommations optimales. Leurs calculs donnent les résultats suivants:

$$z_1^1 = x_1^1 * - x_1^{1a} = \frac{4}{3}\frac{p_2}{p_1} - \frac{8}{3} \text{ et } z_2^1 = x_2^1 * - x_2^{1a} = \frac{8}{3}\frac{p_1}{p_2} - \frac{4}{3} \text{ pour l'individu 1}$$

$$z_1^2 = x_1^2 * - x_1^{2a} = 3\frac{p_2}{p_1} - \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad z_2^2 = x_2^2 * - x_2^{2a} = \frac{3}{2}\frac{p_2}{p_1} - \frac{3}{2} \text{ pour l'individu 2}$$

Question 6 : Pour le prix relatif $\mathbf{p} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$, quelle est la situation sur les marchés concurrentiels du bien 1 et du bien 2 ?

La somme des demandes nettes individuelles pour un bien représente l'état du rapport entre l'offre et la demande de ce bien sur son marché. Si la somme est nulle, l'offre est égale à la demande, le marché est donc en équilibre. Si la somme est négative, le marché est en excès d'offre, si elle est positive, le marché est en excès de demande. Calculons pour chacun des deux marchés la somme des demandes nettes individuelles afin de découvrir quelles sont leurs situations pour le prix relatif $\mathbf{p} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$.

Pour ce prix on a pour le marché du bien 1, la situation suivante :

$$Z_1 = z_1^1 + z_1^2 = 0 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2} > 0$$

À ce prix relatif, le marché du bien 1 est donc en excès de demande. Plus précisément, la demande de l'individu 2 en bien 1 rencontre une offre nulle de la part de l'individu 1.

Sur le marché du bien 2, la situation est la suivante :

$$Z_2 = z_2^1 + z_2^2 = 0 - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4} < 0$$

Le marché du bien 2 est lui, à ce prix relatif, en excès d'offre.

Question 7 : Calculez le prix d'équilibre concurrentiel **p***, l'allocation d'équilibre général et représentez les marchés à l'équilibre.

Le prix d'équilibre général concurrentiel est le prix relatif **p***qui annule la sommes des demandes nettes individuelles sur les deux marchés en même temps. Il est donc solution du système d'équations suivantes :

$$Z_1(\mathbf{p}^*) = 0$$
$$Z_2(\mathbf{p}^*) = 0$$

En raison de la loi de Walras, selon laquelle si n-1 marchés sont en équilibre, alors le nième marché l'est aussi nécessairement, la résolution de la première équation est suffisante pour déterminer le prix relatif d'équilibre :

$$Z_1(\mathbf{p}^*) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}\frac{p_2}{p_1} - \frac{8}{3} + 3\frac{p_2}{p_1} - \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{p}^* = \frac{26}{25}$$

À ce prix relatif d'équilibre, la nouvelle allocation de l'économie est la suivante :

$$x^{**} = (x^{1\,**} = (x_1^{1}{}^{**} = \frac{102}{39}, x_2^{1}{}^{**} = \frac{408}{75}) ; x^{2*} = (x_1^{2*} = \frac{171}{39}, x_2^{2*} = \frac{342}{75})$$

avec $x_h^i{}^{**} = x_h^{ia} + z_h^i$ pour $h = 1,2$ et $i = 1,2$

(La double étoile indique que les allocations individuelles ne sont pas seulement des équilibres individuels mais correspondent aussi à un équilibre général des marchés).

Question 8 : Montrez que cette allocation d'équilibre est un optimum de Pareto.

Une allocation de l'économie est un optimum de Pareto si, d'une part, c'est une allocation réalisable de l'économie et si, d'autre part, les taux marginaux de substitution des individus sont égaux entre eux.

x^{**} est une allocation réalisable de l'économie puisqu'elle satisfait les deux relations suivantes :

$$x_1^1{}^{**} + x_1^2{}^{**} = \frac{273}{39} = 7 = \varpi_1$$
$$x_2^1{}^{**} + x_2^2{}^{**} = \frac{750}{75} = 10 = \omega_2$$

Comme pour cette allocation de l'économie, on a :

$$TMS_{2/1}^1 = \frac{1}{2}\frac{x_2^1{}^{**}}{x_1^1{}^{**}} = \frac{26}{25} = \mathbf{p}^* \quad \text{et} \quad TMS_{2/1}^2 = \frac{x_2^2{}^{**}}{x_1^2{}^{**}} = \frac{26}{25}$$

On en conclut que l'allocation d'équilibre général de l'économie est un optimum de Pareto, c'est-à-dire une situation où il n'est pas possible d'améliorer la situation de l'un sans détériorer la situation de l'autre.

Question 9 : Pour quelles raisons peut-on dire ici que cette situation d'équilibre général concurrentiel est juste ?

Le caractère juste de l'équilibre général concurrentiel n'est pas lié à sa propriété d'optimum de Pareto qui n'est pas un critère de justice mais un critère d'efficacité allocative. Il est néanmoins possible de qualifier de juste la situation des individus à l'équilibre général pour trois motifs. Elle est juste parce que les marchés étant en équilibre, aucun individu n'est rationné dans ses choix. Elle est également juste pour la raison que le prix relatif d'équilibre reflète les caractéristiques individuelles des individus, leurs préférences et leurs capacités techniques, de sorte que chacun obtient à l'équilibre ce qu'il aurait naturellement obtenu : l'équilibre général concurrentiel a les mêmes propriétés que l'équilibre de l'échange naturel. Enfin, elle est juste dans la mesure où il a été donné aux individus les mêmes conditions de départ, tous les deux ont eu la possibilité d'une île où réaliser leur autonomie.

Question 10 : À l'aune de ces résultats, quelles raisons peut-on invoquer pour dire que la situation sur les marchés réels n'est pas toujours juste ?

Trois sortes de raisons peuvent introduire de l'injustice sur les marchés réels. Lorsque les prix ne sont pas des prix d'équilibre, impliquant un rationnement des individus situés du côté « long » des marchés. Lorsque les individus bénéficient de position de pouvoir sur les marchés qui leur permet d'imposer leur prix et donc de déformer les prix naturels tels que l'échange naturel les détermine. Enfin, lorsque les positions initiales de marché ne permettent pas à chacun d'acquérir une position d'autonomie, soit qu'il bénéficie d'une position d'héritier ou de rentier soit qu'il subisse une position de survie.