Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Licence de Sciences Economiques
1ère année, Semestre II
Microéconomie I

Année 2008-2009
Cours de M. Defalvard

Enseignant chargé de TD
Mohamed Saadi

« THE CORE »

Corrigé TD n°4 L'échange naturel 1

On reprend les données de l'économie de Robinson des TD n° 2 et 3, relatives à la fois aux préférences (à savoir $U(x_1,x_2)=\sqrt{x_1x_2}=x_1^{1/2}x_2^{1/2}$) et aux techniques de Robinson (à savoir, $y_2=h(y_1)=-\frac{2}{3}y_1+2.t$), en considérant toujours sa quantité de travail t fixée de manière **exogène**.

Question 1 : Ecrivez le calcul de Robinson (en utilisant la frontière des possibilités de production). Commentez ce calcul et écrivez le Lagrangien qui permet de le résoudre.

Calcul de Robinson :

$$\underset{x_1,x_2}{Max}\,U(x_1,x_2)=\sqrt{x_1x_2}=x_1^{1/2}x_2^{1/2}$$

s.c. $y_2-h(y_1)=0$ avec $h(y_1)=-\frac{2}{3}y_1+2.t$

s.c. $x_1>0 \quad et \quad x_2>0$

s.c. $x_1=y_1 \quad et \quad x_2=y_2$

*(Notation : **s.c** : sous contrainte)*

L'objectif de Robinson est de calculer la composition du panier de biens qui maximise son utilité et qu'il est en mesure de produire à l'aide de ses propres techniques et de son propre travail. Le sens de la quantité de biens qu'il calcule afin de maximiser son utilité n'est pas ici détachable de la manière d'obtenir ces biens. En effet, tout l'enjeu de l'île de Robinson réside dans la possibilité d'un individu autonome qui ne doit rien aux autres, ni à son passé.

Ce calcul est un calcul marchand en ce sens qu'il revient à déterminer quelles sont les quantités de biens qui, en échange de son travail, égalisent l'offre à la demande de Robinson pour chaque bien. Robinson est une économie de marché à lui tout seul, laquelle est alors entièrement gouvernée par la rationalité économique (individuelle) qui n'est

pas ici la simple rationalité marchande d'obtenir le plus avec le moins, mais la rationalité de la vie autonome consistant à satisfaire par soi-même ses propres désirs.

Robinson, individu isolé, recherche les quantités de consommation des biens 1 et 2 qui lui assurent le maximum d'utilité (première ligne), qui devront être produites (ligne 4, c'est à dire Robinson consomme ce qu'il produit) à partir des techniques dont il dispose (ligne 2). La ligne 4 de ce programme peut être interprété comme l'égalité de l'offre et de la demande sur chaque marché (échange naturel), faisant de l'individu isolé une société de marché à lui tout seul

Après quelques simplifications, le Lagrangien $L(x_1, x_2, \lambda)$ s'écrit :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(x_2 - h(x_1))$$

Question 2 : Pourquoi l'étude de la condition de premier ordre est-elle ici suffisante ?

Cette question revient à montrer la convexité de la courbe d'indifférence associé à un niveau k (k>0) de $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2} = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$

La condition de premier ordre permet de calculer les paniers de biens correspondant à un extremum du Lagrangien, c'est-à-dire à un extremum de la fonction d'utilité intégrant la contrainte. Cet extremum pouvant être soit un maximum soit un minimum. Si, ici, l'étude de cette condition est suffisante, c'est parce que nous avons déjà établi dans le TD n°2 que les préférences de Robinson étaient convexes. Dans ce cas, tout extremum du lagrangien est un maximum. Aussi, Robinson peut se contenter de l'étude de la condition de premier ordre.

Rappel

Cette question est équivalente à la question : « *montrez que la courbe d'indifférence associée à un niveau d'utilité donné est convexe* ».

Pourquoi l'étude de la condition de premier ordre est-elle ici suffisante ?

L'étude de la condition de premier ordre est ici suffisante si nous montrons que les courbes d'indifférence sont convexes ce qui est une condition équivalente à la condition de second ordre.

A partir de $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2} = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ = k, on obtient l'équation de la courbe d'indifférence $x_2 = g(x_1)$

On part de $$x^{1/2} x_2^{1/2} = k$$

Il vient $$x_2 = g(x_1) = \left[\frac{k}{x_1^{1/2}}\right]^2 = \frac{k^2}{x_1} = k^2 x_1^{-1}$$

$x_2 = g(x_1) = k^2 x_1^{-1}$ est l'équation de la courbe d'indifférence

- **La courbe d'indifférence associée à k est décroissante si** $g'(x_1)$ **< 0**

On montre que $g(x_1)$ est décroissante car sa dérivée première $g'(x_1)$ est toujours négative pour des quantités positives de bien

$$g'(x_1) = -k^2 x_1^{-2} \quad < \quad 0$$

Pour tout $x_1 > 0$

- **La courbe d'indifférence associée à k est convexe si** $g''(x_1)$ > **0**

On montre que $g(x_1)$ est convexe car sa dérivée seconde $g''(x_1)$ est toujours positive pour des quantités positives de biens :

$$g''(x_1) = -(-2)k^2 x_1^{-3} = 2k^2 x_1^{-3} \quad > \quad 0$$

Pour tout $x_1 > 0$

La courbe d'indifférence associée à *associée à un niveau d'utilité* k est convexe donc la condition de premier ordre est ici suffisante.

<u>Question 3</u> : Déterminez le panier optimal de biens que Robinson produira et consommera. Le calculer pour $t = 4$.

Le Lagrangien $L(x_1, x_2, \lambda)$ s'écrit :

$$L(x_1,x_2,\lambda) = \underbrace{U(x_1,x_2)}_{\text{fonction « objectif »}} + \underbrace{\lambda}_{\text{Multiplicateur de Lagrange}} * \left(\underbrace{x_2 - h(x_1)}_{\text{fonction « contrainte »}} \right)$$

La condition de premier ordre *(ici, annulation des dérivées partielles du Lagrangien)* **s'écrit**

$$\begin{cases} \textbf{(1)} \quad \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow U_1'(x_1,x_2) - \lambda\, h'(x_1) = 0 \\[2ex] \textbf{(2)} \quad \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow U_2'(x_1,x_2) + \lambda = 0 \\[2ex] \textbf{(3)} \quad \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x_2 - h(x_1) = 0 \end{cases}$$

De la condition de premier ordre (ici annulation des dérivées partielles du Lagrangien) **, on déduit la propriété qui caractérise la solution du programme de Robinson**

(1) $$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0 \Rightarrow U_1'(x_1,x_2)-\lambda h'(x_1)=0 \quad \Rightarrow \lambda=\frac{U_1'(x_1,x_2)}{h'(x_1)}$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial x_2}=0 \Rightarrow U_2'(x_1,x_2)+\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-U_2'(x_1,x_2)$$

(3) $$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \Rightarrow x_2-h(x_1)=0$$

De (1) et (2),(c'est à dire des deux premières équations de la condition de premier ordre), par élimination de λ (on a λ= λ), on obtient l'équation (4)

(4) $$\frac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)}=-h'(x_1)$$

Preuve :
A partir des équations (1) et (2) de la condition de premier ordre, en posant λ= λ, il vient donc

$$\boxed{\frac{U_1'(x_1,x_2)}{h'(x_1)}=-U_2'(x_1,x_2)}$$

$\Rightarrow$ **(4)** $$\boxed{\frac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)}=-h'(x_1)}$$

Remarque :En posant λ= λ, les deux équations (1) et (2) permettent d'obtenir une nouvelle égalité numérotée (4) qui permet de donner une équation exprimant x_2 en fonction de x_1 .Ensuite, c'est simple , **on introduit cette équation exprimant** x_2 **en fonction de** x_1 (équation déterminée à partir de la relation (4)) dans **l'équation (3)** (c'est-à-dire la troisième équation de la condition de premier ordre de la méthode de Lagrange, qui est la contrainte $x_2-h(x_1)=0$) pour obtenir la valeur de $x^*{}_1$.
Enfin, **en réutilisant l'équation exprimant** x_2 **en fonction de** x_1 **déterminée à partir de l'égalité (4), on trouve la valeur de** x_2^*.

La résolution de l'égalité (4) d'après les données de l'exercice donne

(4) $$\frac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)}=-h'(x_1) \quad \Rightarrow \quad TMS_{2/1}(x_1^*,x_2^*)=TMST_{2/1}(y_1^*,y_2^*)$$

Avec $x_1^*=y_1^*$ et $x_2^*=y_2^*$

L'égalité $\boxed{\dfrac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = -h'(x_1)}$ consiste en ce que le panier optimal est tel que le taux marginal de substitution entre les biens (leur taux d'échange subjectif) est égal à leur taux marginal de substitution technique (leur taux d'échange technique= leur taux d'échange objectif). Les quantités consommées sont telles que leur valeur relative subjective (en termes de préférences) est égale à leur valeur relative objective ou technique (en termes de difficulté à les produire). Elle correspond à la loi de Gossen dans une économie de Robinson.

Attention !!!

C'est ici qu'on fait l'application numérique

(4) $$\frac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = -h'(x_1)$$

$$\frac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{\dfrac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{\ 1/2}}{\dfrac{1}{2}x_1^{1/2}x_2^{\ -1/2}} = \frac{x_2^{\ 1/2}.x_2^{\ 1/2}}{x_1^{1/2}\ x_1^{1/2}} = \frac{x_2}{x_1}$$, ce résultat a déjà été calculé dans le TD2 « les préférences »

$$-h'(x_1) = \frac{2}{3} \qquad avec \ \ h(x_1) = -\frac{2}{3}x_1 + 2t$$

De (4) à savoir $\dfrac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = -h'(x_1)$, on obtient

$$\Rightarrow \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{3}$$

(4) $$\boxed{x_2 = \frac{2}{3}x_1}$$

Résultat de l'égalité entre $TMS_{2/1}$ et $TMST_{2/1}$ pour le panier optimal

En utilisant cette nouvelle équation (4) dans l'équation (3) de la condition de premier ordre de la méthode de Lagrange à savoir $x_2 - h(x_1) = 0$

De (4) dans (3), on obtient

(4) $$x_2 = \frac{2}{3} x_1$$

(3) $$x_2 - h(x_1) = 0$$

$$avec \; h(x_1) = -\frac{2}{3} x_1 + 2t$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} x_1 - \left[-\frac{2}{3} x_1 + 2t \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} x_1 - 2t = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} x_1 = 2t$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} x_1 = t$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{3}{2} .t}$$

Pour déterminer x_2^*, on réutilise l'équation exprimant x_2 en fonction de x_1, à savoir $\boxed{x_2 = \frac{2}{3} x_1}$ qui a été déterminée à partir de l'égalité (4) $\boxed{\frac{U_1'(x_1, x_2)}{U_2'(x_1, x_2)} = -h'(x_1)}$

D'où $$\boxed{x_2^* = \frac{2}{3} x_1^* = \frac{2}{3} * \frac{3}{2} t = t}$$

Pour t = 4, on obtient

$x_1^* = 6$, $x_2^* = 4$

Résumé : <u>Calcul du panier optimal des biens</u>

Suivant le programme de Lagrangien, de (1) et (2) la condition de premier ordre , on trouve (4) qui permet de donner une équation exprimant x_2 en fonction de x_1.Ensuite, c'est simple , **on introduit cette équation exprimant x_2 en fonction de x_1** (équation déterminée à partir de la relation (4)) dans **l'équation (3)** (c'est-à-dire la troisième équation de la condition de premier ordre de premier ordre de la méthode de Lagrange, qui est <u>la contrainte</u> $x_2 - h(x_1) = 0$) pour obtenir la valeur de x_1^*. Enfin, **en réutilisant l'équation exprimant x_2 en fonction de x_1 déterminée à partir de l'égalité (4), on trouve la valeur de** x_2^*.

Schéma récapitulatif : <u>Calcul du panier optimal des biens</u>

$$L(x_1,x_2,\lambda)=U(x_1,x_2)+\lambda(x_2-h(x_1))$$

I

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0\Rightarrow U_1'(x_1,x_2)-\lambda h'(x_1)=0$

$\left(\Rightarrow \lambda=\dfrac{U_1'(x_1,x_2)}{h'(x_1)}\right)$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0\Rightarrow U_2'(x_1,x_2)+\lambda=0$

$\left(\Rightarrow \lambda=-U_2'(x_1,x_2)\right)$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \quad\Rightarrow\quad x_2-h(x_1)=0$

III

(4) $\dfrac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)}=-h'(x_1)$

II

- *application numérique (calcul) ce qui donne une relation* (4) $x_2=\phi(x_1)$
- *Dans notre exemple et d'après les données de l'exercice*

(4) $x_2=\dfrac{2}{3}x_1$ *dans la question* 3

En utilisant (**<u>en introduisant</u>**) la nouvelle équation(calculée) (4) dans l'équation (3) de la condition de premier ordre de la méthode de Lagrange à savoir $x_2-h(x_1)=0$;

on trouve x_1^*

Enfin, en réutilisant la nouvelle équation(calculée)(4) ; on trouve x_2^*.

Question 4 : Quelle propriété vérifie le panier de biens d'équilibre ? Commentez la en vous aidant de sa représentation graphique.

La résolution de la condition de premier ordre du lagrangien permet de faire apparaître la propriété vérifiée par le panier d'équilibre. En effet, l'élimination de λ (on a λ= λ) des deux premières équations fait ressortir que les quantités correspondant à un extremum satisfont l'égalité entre le rapport des utilités marginales et la pente en valeur absolue de la FPTP. On vérifie que la solution satisfait bien cette propriété :

Rappel

$$\frac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{\frac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2}}{\frac{1}{2}x_1^{1/2}x_2^{-1/2}} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$-h'(x_1)=\frac{2}{3} \qquad avec \quad h(x_1) = -\frac{2}{3}x_1 + 8 \qquad \text{et} \quad t = 4,$$

Pour t = 4, on a

Panier optimal : $x_1^* = 6$ et $x_2^* = 4$

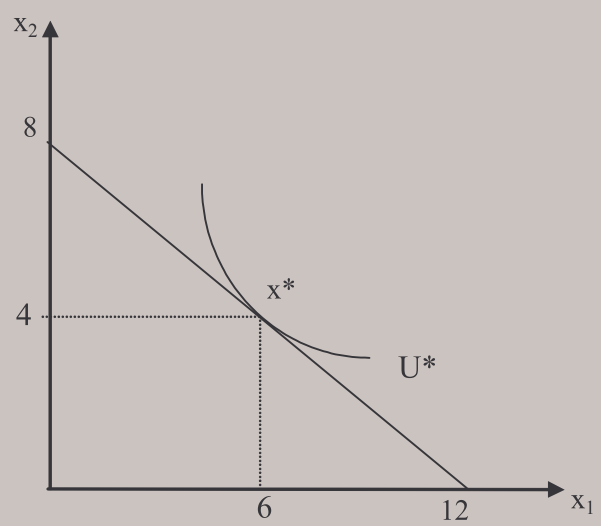
$$\frac{U_1'(6,4)}{U_2'(6,4)} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad et$$

$$-h'(x_1) = \frac{2}{3}$$

$$donc \quad pour \quad x_1^* = 6$$

$$-h'(6) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{U_1'(6,4)}{U_2'(6,4)} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad et \quad -h'(6) = \frac{2}{3}$$ CQFD (abréviation de « ce qu'il fallait démontrer »)



Graphiquement, la propriété de la solution x* correspond à l'égalité entre le $TMS_{2/1}$ et le $TMST_{2/1}$, c'est-à-dire entre le prix relatif subjectif du bien 1 et le coût marginal relatif du bien 1. En utilisant les taux inverses, la solution correspond aussi à l'égalité entre le prix relatif subjectif du bien 2 et le coût marginal relatif du bien 2. Ainsi, dans le panier d'équilibre, entrent en considération les deux volets de la valeur : la valeur subjective et le coût réel. Ainsi, alors que Robinson n'a pas de préférence absolue pour l'un des deux biens par rapport à l'autre, le coût marginal relatif inférieur du bien 1 par rapport au bien 2, conduit Robinson à plus consommer de bien 1 en raison de son moindre coût, donc de son prix relatif objectif plus faible.

<u>Rappel de la question 8 du TD 3 : les techniques</u>

<u>Question 8</u> : Donnez une interprétation en terme de prix des deux TMST qui caractérisent les techniques de production de Robinson.

L'interprétation du $TMST_{2/1}(y_1, y_2)$ en terme de prix revient à l'interpréter en se référant à la notion de coût marginal réel qui mesure le prix des biens du point de vue de leur coût.

On a ici :

$$TMST_{2/1} = \frac{f_2'(t_2)}{f_1'(t_1)} = \frac{Cm(y_1)}{Cm(y_2)} = \frac{2}{3}$$

Le coût marginal **relatif** du bien 1 est $\frac{2}{3}$ inférieur par rapport à celui du bien 2. En se référant au $TMST_{1/2}$, on établit alors que le coût marginal relatif de l'output 2 est une fois et demi supérieur à celui du bien 1. L'output 2 est donc **relativement** plus coûteux à produire que l'output 1 pour Robinson, où la notion de coût est ici une notion de coût réel. C'est le point commun entre la notion de coût et la notion de prix subjectif : à chaque fois, il s'agit de prix **relatif**, en termes réels, sans référence à une évaluation des biens en monnaie.

<u>Question 5</u> : On suppose un choc sur les préférences de Robinson qui sont désormais représentées par la fonction d'utilité $U(x_1, x_2) = x_1\sqrt{x_2} = x_1 x_2^{1/2}$

Calculez le nouveau panier optimal de biens de Robinson et les prix des biens à l'équilibre. Comparez avec les résultats de la question 3 et commentez les différences.

<u>Choc de préférences et comparaison avec la question 3 :</u>

Choc de préférences + techniques de production (initiales) inchangées

Nouvelle fonction d'utilité $U(x_1, x_2) = x_1\sqrt{x_2} = x_1 x_2^{1/2}$

Rappel

On a une fonction d'utilité de la forme $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha}.x_2^{\beta}$ **avec** α **et** β sont des nombres positifs qui décrivent les préférences respectivement pour le bien 1 et le bien 2. α **et** β représentent respectivement les élasticités de U par rapport à x_1 et de U par rapport à x_2

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(x_2 - h(x_1))$$

La condition de premier ordre *(ici, annulation des dérivées partielles du Lagrangien)* **s'écrit**

$$\begin{cases} (1) & \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow U_1'(x_1, x_2) - \lambda\, h'(x_1) = 0 \\ (2) & \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow U_2'(x_1, x_2) + \lambda = 0 \\ (3) & \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x_2 - h(x_1) = 0 \end{cases}$$

De la condition de premier ordre [ici a*nnulation des dérivées partielles du Lagrangien, et e*n résolvant la condition de premier ordre (ici encore suffisante) sur le modèle de la question 3] **, on déduit la propriété qui caractérise la solution du programme de Robinson**

$$\begin{cases} (1) & \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow U_1'(x_1, x_2) - \lambda h'(x_1) = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \dfrac{U_1'(x_1, x_2)}{h'(x_1)} \\ (2) & \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow U_2'(x_1, x_2) + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -U_2'(x_1, x_2) \\ (3) & \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x_2 - h(x_1) = 0 \end{cases}$$

De (1) et (2),(c'est à dire des deux premières équations de la condition de premier ordre), par élimination de λ (on a λ= λ), on obtient l'équation (4)

$$(4) \qquad \frac{U_1'(x_1, x_2)}{U_2'(x_1, x_2)} = -h'(x_1)$$

Attention !!!

C'est ici qu'on fait l'application numérique

Avec <u>la nouvelle fonction d'utilité et la FPTP(inchangée) initiale</u> , l'application numérique (le calcul) donne

$$\frac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{x_2^{1/2}}{\frac{1}{2}x_1x_2^{-1/2}} = \frac{x_2^{1/2}.x_2^{1/2}}{\frac{1}{2}x_1} = \frac{x_2}{\frac{1}{2}x_1} = \frac{2x_2}{x_1}$$

$$-h'(x_1) = \frac{2}{3} \qquad avec \quad h(x_1) = -\frac{2}{3}x_1 + 2t$$

De (4) à savoir $\frac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = -h'(x_1)$, on obtient

$$\Rightarrow \frac{2x_2}{x_1} = \frac{2}{3}$$

(4) $\boxed{x_2 = \frac{1}{3}x_1}$

Résultat de l'égalité entre $TMS_{2/1}$ et $TMST_{2/1}$ pour le panier optimal

En utilisant **(en <u>introduisant</u>)** cette nouvelle équation (4) dans l'équation (3) de la condition de premier ordre de la méthode de Lagrange à savoir $x_2 - h(x_1) = 0$

De (4) dans (3), on obtient

(4) $\boxed{x_2 = \frac{1}{3}x_1}$

(3) $x_2 - h(x_1) = 0$ $\qquad$ $\boxed{avec \quad h(x_1) = -\frac{2}{3}x_1 + 2t}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x_1 - \left[-\frac{2}{3}x_1 + 2t\right] = 0$$

$$\Rightarrow x_1 - 2t = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2\,t$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1^* = 2.t}$$

Pour déterminer x_2^* , on réutilise l'équation exprimant x_2 en fonction de x_1 , à savoir $\boxed{x_2 = \frac{1}{3}x_1}$ qui a été déterminée à partir de l'égalité (4) $\boxed{\frac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = -h'(x_1)}$

D'où $$\boxed{x_2^* = \frac{1}{3} x_1^* = \frac{1}{3} * 2t = \frac{2}{3}.t}$$

Pour t = 4, on obtient

$x_1^* = 8$, $x_2^* = \frac{8}{3}$

$x_1* = 2t$ *et* $x_2* = \frac{2}{3}t$ soit pour t = 4, le panier optimal : $x* = (8\,;\frac{8}{3})$

$$TMS_{2/1}(x_1, x_2) = \frac{2x_2}{x_1}$$

$$\mathrm{TMST}_{2/1}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2) = \frac{2}{3}$$

On a à l'équilibre : $TMS_{2/1}(8;\frac{8}{3}) = \frac{2*\frac{8}{3}}{8} = \frac{2}{3}$ et $TMST_{2/1}(8;\frac{8}{3}) = \frac{2}{3}$

Comme nous l'avions vu dans le TD n°3, ce choc sur les préférences représente une plus grande valorisation subjective du bien 1 pour lequel Robinson a désormais une préférence absolue. Ceci se traduit par une plus grande quantité de bien 1 produite et consommée par Robinson (8 unités au lieu de 6 unités) et une moindre quantité produite et consommée de bien 2.

Par contre, <u>la valeur des biens à l'équilibre n'est pas modifiée par ce choc sur les préférences</u>. Pourquoi? En effet, nous sommes dans le cas particulier où la plus grande demande de bien 1 n'a pas d'effet sur le coût marginal de sa production qui est constant. <u>Quelles que soient les préférences de Robinson, le prix des biens aussi bien du point de vue de l'utilité que du coût sera toujours le même, déterminé par le coût marginal relatif du bien qui est constant. Ce cas particulier, correspondant à une FPTP qui est une droite, fait que le prix des biens à l'équilibre est seulement déterminé par les conditions de l'offre (les techniques de production)</u>. La demande n'influe que sur les quantités produites des biens et que sur la répartition du temps de travail entre les branches de production. Ce cas particulier de rendements d'échelle constants correspond au seul cas que les économistes classiques avaient envisagé, où le prix à l'équilibre est un prix naturel déterminé par les conditions de l'offre.

<u>Question 6</u> : On admet cette fois **<u>un choc sur les techniques de Robinson dans la production du bien 1</u>** désormais représentées par la fonction de production suivante :

$$y_1 = f(t_1) = 4.t_1$$

Calculez la nouvelle FPTP (les techniques dans la branche 2 restent pour leur part inchangées avec $y_2 = 2.t_2$).

Choc sur les techniques de production + <u>préférences (initiales) de Robinson inchangées</u> (en considérant les <u>préférences initiales de la question n°1)</u>

Dans l'économie de Robinson considérée, les techniques de production qu'il utilise sont représentées par les 3 équations suivantes représentées par les 3 équations suivantes :

(1) $\boxed{y_1 = f_1(t_1) = 4.t_1}$ pour l'output 1

(2) $y_2 = f_2(t_2) = 2.t_2$ pour l'output 2

(3) $t = t_1 + t_2$ pour son temps de travail donné.

<u>A partir de ces équations (1), (2) et (3) nous déduisons la frontière des possibilités techniques de production FPTP</u>

(1) $y_1 = 4.t_1 \Leftrightarrow 4.t_1 = y_1 \Rightarrow$ **(1')** $t_1 = \frac{1}{4}.y_1$

(2) $y_2 = 2.t_2 \Leftrightarrow 2.t_2 = y_2 \Rightarrow$ **(2')** $t_2 = \frac{1}{2}.y_2$

(3) $t = t_1 + t_2$

2

De (1') et (2') dans (3), on obtient (3')

(3') $t = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2$

Ce qui revient à $\frac{1}{2}y_2 = -\frac{1}{4}y_1 + t$

$$y_2 = -\frac{1}{2}y_1 + 2.t$$

C'est l'équation de la courbe de la frontière des possibilités techniques de production FPTP

Cette équation est de la forme $\boxed{y_2 = h(y_1) = -\frac{1}{2}y_1 + 2.t}$

La nouvelle FPTP est d'équation : $y_2 = h(y_1) = -\frac{1}{2}y_1 + 2t$

Question 7 :

Calculez le nouveau panier optimal de biens (en considérant les préférences initiales de la question n°1) et le prix des biens à l'équilibre. Comparez avec vos résultats aux questions 3 et 5 précédentes et commentez les différences.

Choc sur les techniques de production et comparaison la question 3 et 5

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(x_2 - h(x_1))$$

En résolvant la condition de premier ordre (ici encore suffisante) sur le modèle de la question 3,

De la condition de premier ordre (ici, *annulation des dérivées partielles du Lagrangien*) **on déduit la propriété qui caractérise la solution du programme de Robinson**

on obtient :

(1) $$\frac{\partial L}{\partial x_1} = U_1'(x_1, x_2) - \lambda h'(x_1) = 0$$

$$\left(\Rightarrow \lambda = \frac{U_1'(x_1, x_2)}{h'(x_1)} \right)$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial x_2} = U_2'(x_1, x_2) + \lambda = 0$$

$$\left(\Rightarrow \lambda = -U_2'(x_1, x_2) \right)$$

(3) $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_2 - h(x_1) = 0$$

De (1) et (2),(c'est à dire des deux premières équations de la condition de premier ordre), par élimination de λ (on a λ= λ), on obtient l'équation (4)

(4) $$\frac{U_1'(x_1, x_2)}{U_2'(x_1, x_2)} = -h'(x_1)$$

Avec la fonction d'utilité initiale et la nouvelle FPTP, l'application numérique (le calcul) donne

$$\frac{U_1'(x_1, x_2)}{U_2'(x_1, x_2)} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{\frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^{1/2}}{\frac{1}{2} x_1^{1/2} x_2^{-1/2}} = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{déjà calculé}$$

$$-h'(x_1) = \frac{1}{2} \qquad \textit{avec} \quad h(x_1) = -\frac{1}{2} x_1 + 2t$$

De (4) à savoir $\frac{U_1'(x_1, x_2)}{U_2'(x_1, x_2)} = -h'(x_1)$, on obtient

$$\Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2}$$

(4) $$\boxed{x_2 = \frac{1}{2} x_1}$$

Résultat de l'égalité entre $TMS_{2/1}$ et $TMST_{2/1}$ pour le panier optimal

En utilisant **(en introduisant**) cette nouvelle équation (4) dans l'équation (3) de la condition de premier ordre de la méthode de Lagrange à savoir $x_2 - h(x_1) = 0$

De (4) dans (3), on obtient

(4) $\boxed{x_2 = \frac{1}{2} x_1}$

(3) $x_2 - h(x_1) = 0$ $\boxed{avec \quad h(x_1) = -\frac{1}{2}x_1 + 2t}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x_1 - \left[-\frac{1}{2}x_1 + 2t \right] = 0$$

$$\Rightarrow x_1 - 2t = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1^* = 2.t}$$

Pour déterminer x_2^*, on réutilise l'équation exprimant x_2 en fonction de x_1, à savoir $\boxed{x_2 = \frac{1}{2} x_1}$ qui a été déterminée à partir de l'égalité (4) $\boxed{\frac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = -h'(x_1)}$

D'où $\boxed{x_2^* = \frac{1}{2} x_1^* = \frac{1}{2} * 2t = t}$

Pour t = 4, on obtient

$x_1^* = 8$, $x_2^* = 4$

$x_1* = 2t$ *et* $x_2* = t$ D'où pour t = 4, $x* = (8\,;4)$

Les prix à l'équilibre sont :

$$TMS_{2/1}(8;4) = \frac{x_2 *}{x_1 *} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

et $TMST_{2/1}(8;4) = \frac{1}{2}$ avec $TMST_{2/1}(y_1, y_2) = \frac{1}{2}$

avec $x_1^* = y_1^*$ et $x_2^* = y_2^*$

Cette fois les prix à l'équilibre ne sont plus les mêmes. Le prix relatif subjectif du bien 1 est toujours égal au coût marginal relatif du bien 1 (propriété de l'équilibre) mais à un niveau inférieur à ce qu'il était dans les questions précédentes. Le prix relatif du bien 1 a baissé (alors que le prix relatif du bien 2 a augmenté) suite au choc technologique : il n'est plus que de un demi contre deux tiers précédemment. Ceci est dû a l'augmentation de sa productivité marginale et donc à la diminution de son coût marginal. Les prix des biens à l'équilibre de Robinson reproduisent bien la loi du marché où lorsque le coût de production d'un bien baisse, toutes choses égales par ailleurs, son prix sur le marché baisse aussi. Ils révèlent les fondements "naturels" de la loi du marché.

De plus, contrairement à la question 5 où l'augmentation de la quantité du bien 1 se faisait au détriment de la quantité du bien 2, ici l'augmentation de la quantité produite et consommée de bien 1 à

l'équilibre ne se fait pas au détriment de la quantité de bien 2 qui reste constante. Par rapport aux résultats de la question 3, l'économie de Robinson connaît donc suite à ce choc technologique une croissance de sa production et de sa consommation.

<u>Question 8</u> : Comment peut-on interpréter le changement de techniques dans le cadre de l'économie de Robinson ? Que peut-on en déduire pour les économies de marché actuelles ?

Le changement de technique a permis d'améliorer la productivité marginale du travail dans la branche 1 sans en changer la nature qui est toujours constante : chaque heure de travail supplémentaire rapporte désormais 4 unités de bien 1 en plus au lieu de 3 précédemment. On peut ici penser à une innovation technique réalisée par Robinson qui a rendu son capital humain plus performant. Cette amélioration technique s'est traduite par une croissance de l'économie de Robinson. Aussi, pour nos économies actuelles, on peut en déduire que la recherche de la croissance passe fondamentalement par des gains de productivité, liés à la plus grande efficacité des techniques de production où derrière cette plus grande efficacité des techniques il y a toujours un capital humain enrichi, parce qu'innovant.

Certes, il n'y a pas de raison que dans nos économies actuelles pas plus que dans celle de Robinson l'innovation technique tombe du ciel, elle suppose un investissement (voir mon ouvrage chapitre 5, section 2 le contrat naturel de croissance). Cette innovation suppose un investissement qui comporte une part de risque : s'il échoue la croissance se transforme en crise (en récession).

Enfin, les gains de productivité montrent que pour s'enrichir réellement, avec une croissance réelle, il n'est pas nécessaire de travailler plus, mais plutôt de travailler mieux.

Schéma récapitulatif : <u>Calcul du panier optimal des biens</u>

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(x_2 - h(x_1))$$

I

(1) $$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow U_1'(x_1, x_2) - \lambda h'(x_1) = 0$$

$$\left(\Rightarrow \lambda = \frac{U_1'(x_1, x_2)}{h'(x_1)} \right)$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow U_2'(x_1, x_2) + \lambda = 0$$

$$\left(\Rightarrow \lambda = -U_2'(x_1, x_2) \right)$$

(3) $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 - h(x_1) = 0$$

(4) $$\frac{U_1'(x_1, x_2)}{U_2'(x_1, x_2)} = -h'(x_1)$$

II

• *application numérique (calcul) ce qui donne une relation* (4) $x_2 = \phi(x_1)$

• *Dans notre exemple et d'après les données de l'exercice*

(4) $x_2 = \frac{2}{3} x_1$ *dans la question* 3

(4) $x_2 = \frac{1}{3} x_1$ *dans la question* 5

(4) $x_2 = \frac{1}{2} x_1$ *dans la question* 7

III

En utilisant (**<u>en introduisant</u>**) la nouvelle équation(calculée) (4) dans l'équation (3) de la condition de premier ordre de la méthode de Lagrange à savoir $x_2 - h(x_1) = 0$;

on trouve x_1^*

Enfin, en réutilisant la nouvelle équation(calculée)(4) ; on trouve x_2^*.

Achtung !!!!!

Astuce : ce qu'il faut comprendre

- La propriété qui caractérise la solution du programme de Robinson $\dfrac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = -h'(x_1)$
- La contrainte de Robinson $x_2 - h(x_1) = 0$

La résolution du programme de Robinson revient à faire le calcul $\dfrac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = -h'(x_1)$

ce qui donne x_2 en fonction de x_1 que l'on introduit dans l'équation $x_2 - h(x_1) = 0$

pour obtenir la valeur de x^*_1. Enfin, en réutilisant l'équation exprimant x_2 en fonction de x_1 déterminée à partir de l'égalité $\dfrac{U_1'(x_1,x_2)}{U_2'(x_1,x_2)} = -h'(x_1)$, on trouve la valeur de x_2^*.