

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Notes de cours pour niveau L1. Calcul différentiel et intégral

Thierry Jeantheau (auteur principal)
Magdalena Kobylanski (apports initiaux)
Pierre Vandekerkhove (apports initiaux)

3. Calcul intégral

3.1. Primitives et intégrales

Définition 3.1. Une fonction F , continue et dérivable sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite primitive d'une fonction f sur A , si elle admet f pour dérivée sur A , soit la relation :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Quelques exemples:

- $F : x \mapsto e^{3x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3e^{3x}$.
- $F : x \mapsto x^3/3$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x^2$.
- $F : x \mapsto \sin x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \cos x$.
- $F : x \mapsto \cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto -\sin x$.

Théorème 3.1. Si une fonction f admet une primitive F sur une partie A de $\mathbb{R}$, nous avons alors :

1. f admet une infinité de primitives sur A , et ce sont toutes les fonctions G définies par :

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{pour tout } x \in A,$$

où C désigne une constante arbitraire.

2. f admet une unique primitive F_0 sur A qui prenne une valeur donnée y_0 en un point x_0 .

Démonstration. Considérons deux fonctions arbitraires F_1 et F_2 telles que $F_1' = f$ et $F_2' = f$, alors $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = 0$. On rappelle l'inégalité des accroissements finis. Si h est une fonction dérivable, et si pour tout x , $|h'(x)| \leq M$, alors, pour tout a et b ,

$$|h(b) - h(a)| \leq M |b - a|.$$

En posant $h = F_1 - F_2$, on a $M = 0$, donc h est une fonction constante sur A .

Pour 2, on choisit F une primitive (quelconque) de f . Toutes les primitives possibles s'écrivent donc $F(x) + C$, on doit donc avoir $F(x_0) + C = y_0$. On a donc une unique solution, avec $C = y_0 - F(x_0)$. ■

Exemple. Toutes les primitives de $f(x) = 3x^2$ sont de la forme $F(x) = x^3 + C$, $F_0(x) = x^3 + 1$ est celle qui passe par $(1, 2)$.

Une utilité des primitives : le calcul des intégrales. Considérons une fonction f continue sur un domaine D_f et $[a, b] \subset D_f$. Pour calculer l'aire sous la courbe de f sur $[a, b]$ (signée positivement sur la ou les zones où f est positive, et négativement sur la ou les zones où f est négative...faire un dessin), on utilise une primitive F de f , en utilisant la formule de l'intégrale entre a et b de f ,

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque 1. Notons que le choix de la primitive F n'a aucune importance, puisque si l'on prend une autre primitive $F + C$, $C \in \mathbb{R}$, on trouve le même résultat $(\int_a^b f(x)dx = F(b) + C - F(a) - C)$.

Remarque 2. Lorsqu'on écrit les bornes d'une intégrale, celle qui est écrite en bas est par convention plus petite que celle qui est en haut, mais ce n'est qu'une convention et on a le droit d'écrire en toute généralité que

$$\int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt.$$

La formule liant intégrale et primitive est admise. On peut toutefois la vérifier sur quelques exemples.

1. $\int_a^b \lambda dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$. L'aire du rectangle est égal à $C(b - a)$.
2. $\int_a^b \lambda t dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$. L'aire du rectangle et du triangle donne la formule.
3. Pour $x > 0$, on définit $\ln x$ comme la fonction telle que $\ln(1) = 0$ et $\ln(x)$ est l'aire de la zone située sous la courbe $y = 1/t$, entre 1 et x . Si $x_0 < x$, on voit que $\ln x - \ln x_0$ est l'aire de la zone située sous la courbe $y = 1/x$, entre x_0 et x . On a donc l'encadrement

$$\frac{x - x_0}{x} < \ln x - \ln x_0 < \frac{x - x_0}{x_0}$$

Donc la fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\ln'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

La fonction $\ln$ est donc bien la primitive de $1/x$ qui passe par 0 en 1.

Relation de Chasles pour les intégrales. Si c est un réel strictement compris entre a et b , on peut écrire

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Proposition 3.1. (Linéarité des intégrales) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, de primitives respectives F et G , et λ un réel. On a alors

$$\int_a^b [f + g](x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \quad \text{et} \quad \int_a^b [\lambda f](x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que si F est une primitive de f , et G une primitive de g , $F + G$ est une primitive de $f + g$, et λF une primitive de λf , donc

$$\int_a^b [f + g](x) dx = [[F + G](x)]_a^b = [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = [[\lambda F](x)]_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda [F(x)]_a^b = \lambda \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

3.2. Quelques primitives classiques

On propose de rappeler dans cette section quelques primitives classiques (à connaître donc!) en précisant à chaque fois leur domaine de définition.

Notation. On peut utiliser le signe intégral pour noter les primitives de f , sous la forme

$$\int^x f(t)dt = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

où F est une primitive particulière de f . Dans certains livres de DEUG, les primitives sont notées simplement $\int f(x)dx$.

- $\int^x 1 dt = x + C, \quad D = \mathbb{R}.$
- $\int^x t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \text{ si } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1, D \text{ dépend de } \alpha.$
- $\int^x \frac{1}{t} dt = \ln|x| + C, \quad D = \mathbb{R}^*.$
- $\int^x e^t dt = e^x + C, \quad D = \mathbb{R}.$
- $\int^x \cos t dt = \sin x + C, \quad D = \mathbb{R}.$
- $\int^x \sin t dt = -\cos x + C \quad D = \mathbb{R}.$
- $\int^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x + C, \quad D = \mathbb{R}.$

3.3. Intégration par parties

L'intégration par partie est basée sur la formule de dérivée du produit. Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même domaine D , on rappelle que

$$(uv)' = u'v + uv' \Leftrightarrow uv' = (uv)' - u'v.$$

On en déduit la formule d'**intégration par parties pour les intégrales**.

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

Exemple 1. Trouver les primitives de la fonction $f(x) = x \cos x$. Pour calculer $\int_a^x t \cos t dt$, on pose

$$\begin{aligned} u(t) &= t & , & \quad u'(t) = 1 \\ v'(t) &= \cos t & , & \quad v(t) = \sin t. \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^x t \cos t dt &= [t \sin t]_a^x - \int_a^x \sin t dt \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

Exemple 2. Primitive de la fonction $\ln$: En posant $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^x \ln t \, dt &= [t \ln t]_a^x - \int_a^x t \frac{1}{t} dt \\ &= x \ln x - x + C.\end{aligned}$$

Cette méthode a de l'intérêt dans la recherche de primitives de fonction du type $f(x) = P(x)e^x$ où P désigne un polynôme de degré n .

3.4. Intégration par changement de variable

Soient u une fonction dérivable à valeurs dans un intervalle J , et g une fonction de J dans $\mathbb{R}$ ayant pour primitive G . On rappelle que

$$(G \circ u)' = (G' \circ u)u' = (g \circ u)u'.$$

Si la fonction f à intégrer est de la forme $(g \circ u)u'$, on peut directement exploiter cette remarque, puisque

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b g[u(t)]u'(t) \, dt = [G(u(t))]_a^b = [G(s)]_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} g(s)ds.$$

Exemple 1. Calculons $\int_a^b e^{\sin t} \cos t \, dt$. On reconnaît la formule, avec $g(x) = e^x$ et $u(t) = \sin t$, donc

$$\int_a^b e^{\sin t} \cos t \, dt = [e^{\sin t}]_a^b = [e^s]_{\sin(a)}^{\sin(b)} = \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} e^s ds.$$

Pour se souvenir de ce calcul, on pose $s = \sin t$, $ds = \cos t dt$, et on remplace les bornes de l'intégrale (t allant de a à b , s va de $\sin a$ à $\sin b$).

Exemple 2. Calcul de $\int_a^x \cos(\omega t + \varphi) \, dt$. On pose $s = \omega t + \varphi$, $ds = \omega dt$, donc

$$\int_a^x \cos(\omega t + \varphi) \, dt = \frac{1}{\omega} \sin(x + \varphi).$$

Exemple 3. Calculons $\int_0^b \frac{t}{1+t^4} \, dt$. On fait apparaître la formule en utilisant la linéarité de l'intégrale

$$\int_0^b \frac{t}{1+t^4} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^b \frac{1}{1+(t^2)^2} 2t dt.$$

On pose donc $s = t^2$, $ds = 2t dt$, et

$$\int_0^b \frac{t}{1+t^4} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{b^2} \frac{1}{1+s^2} \, ds = \frac{1}{2} [\arctan(s)]_0^{b^2} = \frac{\arctan(b^2)}{2}.$$

La formule de dérivation de la composée permet aussi de changer la forme de l'intégrale à calculer, en espérant trouver quelque chose de plus simple à calculer. C'est le but du **changement de variable**. Pour cela, on procède de la façon suivante.

Soient I un intervalle ouvert, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, on cherche à calculer $\int f(t)dt$. Soit u une fonction de I dans $\mathbb{R}$, strictement monotone, continue et dérivable telle que $u'(x) \neq 0$. Comme dans l'exemple de la fonction $\arctan$, on a vu qu'une telle fonction admettait une fonction réciproque dérivable notée v . On a donc $(v \circ u)(x) = x$.

Posons $g = (f \circ v)v'$. Montrons que si G est une primitive de g , alors $G \circ u$ est une primitive de f . Pour tout $x \in I$, on a

$$(G \circ u)'(x) = g[u(x)]u'(x).$$

Or

$$g[u(x)] = (f \circ v)(u(x)) v'(u(x)) = f(x) (v' \circ u)(x).$$

Donc

$$(G \circ u)'(x) = f(x) (v' \circ u)(x) u'(x).$$

On reconnaît la dérivée de $v \circ u$, qui est égale à 1, donc

$$(G \circ u)'(x) = f(x).$$

On peut donc maintenant écrire

$$\int_a^b f(t) dt = [G(u(t))]_a^b = [G(t)]_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} (f \circ v)(t) v'(t) dt.$$

C'est la formule du changement de variable pour les intégrales. Pour la retrouver, il suffit d'introduire la nouvelle variable d'intégration $s = u(t)$. On pose

$$\begin{aligned} t &= v(s) \\ dt &= v'(s) ds \end{aligned}$$

et si t varie de $a \rightarrow b$ on traduit cette variation sur s en disant que s varie de $u(a) \rightarrow u(b)$. On obtient bien la formule démontrée plus haut, c'est à dire

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(v(s)) v'(s) ds. \quad (1)$$

Il est très important de noter que, pour effectuer ce changement de variable, la fonction u doit

- être définie sur le même domaine que f ,
- strictement monotone,
- dérivable et de dérivée non nulle.

Exemple 1. Soit $a \neq 0$. Calculons $\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt[3]{1+t}} dt$, $x > 0$. On pose $s = u(t) = \sqrt[3]{1+t}$. Pour $t > -1$, c'est une fonction strictement croissante, on peut donc effectuer le changement de variable. On a $t = u(t) = s^3 - 1$. On en déduit que $dt = 3s^2 ds$, d'où

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt[3]{1+t}} dt = \int_1^{\sqrt[3]{1+b}} \frac{(s^3 - 1)^2}{s} 3s^2 ds = 3 \int_1^{\sqrt[3]{1+b}} (s^3 - 1)^2 s ds,$$

qui se calcule facilement (primitive d'un polynôme).

Exemple 2. Calcul de $\int_0^x \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$, $x > 0$, $x \neq 1$ (le domaine de f est $D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$).

On propose de poser le changement de variable $s = \sqrt{t}$ pour tout t du domaine. On a donc $t = s^2$ et $dt = 2s ds$. Il vient alors

$$\int_0^x \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt = \int^{\sqrt{x}} \frac{2s}{(1-s^2)s} ds = \int^{\sqrt{x}} \frac{2}{(1-s^2)} ds.$$

Ensuite, on remarque que

$$\frac{2}{(1-s^2)} = \frac{2}{(1+s)(1-s)} = \frac{1}{(1+s)} - \frac{1}{(1-s)},$$

donc la primitive cherchée est

$$\ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| + C.$$

3.5. Intégration des fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une fonction du type :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

où P et Q sont des polynômes à coefficients réels. On considère par la suite que le coefficient du terme de plus haut degré de Q vaut 1. Pour trouver les primitives d'une fraction rationnelle, il faut la décomposer en somme d'un polynôme et de fraction rationnelles simples dont on connaît les primitives.

Définition 3.2 Soit P/Q une fraction rationnelle

1. P/Q est dite irréductible si les polynômes P et Q n'ont pas de racines en commun.
2. Les pôles d'une fraction rationnelle irréductible P/Q sont les racines du polynôme Q .

La méthode. On admet que Q peut toujours s'écrire sous forme de produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$, c'est à dire

$$Q(x) = (x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_k)^{n_k} \times (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_lx + q_l)^{m_l},$$

où

- les a_i sont les racines réelles distinctes du polynôme Q , d'ordre de multiplicité n_i ,
- et les $(x^2 + p_jx + q_j)$ sont des polynômes distincts de discriminant négatif.

Dans le cas où $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on opère la division euclidienne $P = EQ + R$, où E , Q et R sont des polynômes à coefficient réels avec $\deg(Q) > \deg(R)$ (R est le reste de la division euclidienne). Ainsi $P/Q = E + R/Q$ (et E est facile à intégrer!). Il reste donc à intégrer une fraction rationnelle où le numérateur a un degré inférieur à celui du dénominateur.

On admet que toute fraction rationnelle (irréductible) du type R/Q peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = S_1(x) + \cdots + S_k(x) + T_1(x) + \cdots + T_l(x), \quad (2)$$

où les S_i , $i = 1, \dots, k$, sont des **éléments simples** associés respectivement aux **pôles** a_i de multiplicité n_i tels que

$$S_i(x) = \frac{A_1}{x - a_i} + \frac{A_2}{(x - a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{n_i}}{(x - a_i)^{n_i}},$$

et les T_j , $j = 1, \dots, l$, sont des **éléments simples** associés aux **facteurs** $x^2 + p_jx + q_j$ d'ordre m_j tels que

$$T_j(x) = \frac{B_1x + C_1}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \cdots + \frac{B_{m_j}x + C_{m_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{m_j}}.$$

Le problème est de déterminer tous les nombres réels A_i , B_j , et C_j .

Exemple 1. Cherchons une primitive de $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$.

On commence par la division euclidienne:

$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Ici, il est facile de voir que

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right).$$

Donc les primitives sont

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{|x-1|}{|x+1|} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2. Cherchons une primitive de $f(x) = \frac{6x^2}{x^3+x^2+x-3}$.
La décomposition en éléments simples est donné par

$$\frac{6x^2}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+3}.$$

- Pour trouver a , on multiplie les deux membres de l'équation par $(x-1)$, et on prend $x = 1$. On a donc $a = 1$.
- Pour trouver c , on prend $x = 0$, et on trouve $c = 3a = 3$.
- Pour trouver b , on multiplie les deux membres de l'équation par x , et on fait tendre x vers $+\infty$. On trouve $a+b=6$, donc $b=5$.

On a donc obtenu

$$\frac{6x^2}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{5x+3}{x^2+2x+3}.$$

Pour calculer l'intégrale du deuxième terme, on a

$$\frac{5x+3}{x^2+2x+3} = \frac{5}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{2}{x^2+2x+3}.$$

Pour calculer la primitive du dernier terme, il faut faire apparaître la dérivée de arctan:

$$\begin{aligned} \int^x \frac{dt}{t^2+2t+3} &= \int^x \frac{dt}{(t+1)^2+2} \\ &= \int^x \frac{dt}{2 \left(\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)}. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $s = (t+1)/\sqrt{2}$, et

$$\int^x \frac{dt}{t^2+2t+3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int^{\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \frac{ds}{s^2+1}.$$

On peut donc maintenant donner la primitive cherchée

$$\ln|x-1| + \frac{5}{2} \ln|x^2+x+1| - \sqrt{2} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3. Cherchons une primitive de $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)}$.
La décomposition en éléments simples est donné par

$$\frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{dx+e}{x^2+x+1}.$$

- Pour trouver a , on multiplie les deux membres de l'équation par $(x+1)$, et on prend $x = -1$ (la racine du polynôme $x+1$). On a donc $a = 1/4$.
- Pour trouver c , c'est la même méthode, on multiplie par $(x-1)^2$, et on prend $x = 1$. On a donc $c = 1/6$.
- Pour trouver d et e , on recherche les racines complexes du polynôme $x^2 + x + 1$. On sait que c'est j et $\bar{j} = j^2$. En multipliant les deux membres de l'équation par $(x^2 + x + 1)$ et en prenant successivement $x = j$ et $x = j^2$, on obtient

$$dj + e = \frac{j}{-3j(j+1)} = \frac{1}{3j^2} = \frac{j}{3} \quad \text{et} \quad dj^2 + e = \frac{j^2}{-3j^2(j^2+1)} = \frac{1}{3j} = \frac{j^2}{3}.$$

En soustrayant les égalités, on obtient $d = 1/3$, puis $e = 0$.

- Enfin, pour trouver b , on utilise une technique de passage à la limite. On multiplie pour cela les deux membres de l'équation par x , et on fait tendre x vers $+\infty$. On obtient

$$1 = a + b + d,$$

donc $b = 1 - (a + d) = 5/12$. (**Remarque.** On peut aussi prendre une valeur particulière pour x , par exemple $x = 0$, ce qui conduit à $0 = a - b + c + e$, et on retrouve $b = 5/12$.)

On a donc obtenu

$$\frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{4(x+1)} + \frac{5}{12(x-1)} + \frac{1}{6(x-1)^2} + \frac{x}{3(x^2+x+1)}.$$

Le dernier terme est le seul à poser problème. L'astuce classique consiste à reconnaître au numérateur le début de la dérivée du dénominateur.

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1} \right).$$

Pour calculer la primitive du dernier terme, il faut faire apparaître la dérivée de $\arctan$:

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{t^2+t+1} dt &= \int^x \frac{1}{(t+1/2)^2 + 3/4} dt \\ &= \int^x \frac{1}{\frac{3}{4} \left(\left(\frac{2(t+1/2)}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)} dt. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $s = (2t+1)/\sqrt{3}$, et

$$\int^x \frac{1}{t^2+t+1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{s^2+1} ds.$$

On peut donc maintenant donner la primitive cherchée

$$\frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{5}{12} \ln|x-1| - \frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$